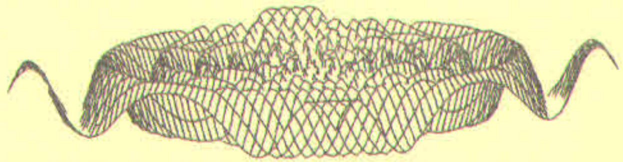
ӘЛЬ - ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚТЫҢ МЕМЛЕКЕТТІК ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

З.Ж.Жаңабаев, О.Н.Жангунов, О.Д.Бигожаев

БЕЙСЫЗЫҚ ФИЗИКА БАСТАМАЛАРЫ



АЛМАТЫ, 2000

УДК 530.18;531.19

Рецензенттер:
физика-математика ғылымдарының докторы, профессор С.Е.Көмеков
физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент А.Х.Абильдаев

З.Ж.Жаңабаев, О.Н.Жангунов, О.Д.Бигожаев
Бейсызық физика бастамалары: Оқу құралы. -Алматы: "Гермес", 2000. -68 б.

Оқу құралында бейсызық физиканың негізгі ұғымдары қарастырылған, оларды табиғаты әртүрлі күрделі жүйелердегі тепе-теңсіз құбылыстарды сипаттауға қолдану жолдары көрсетілген.

Оқу құралы университеттердің физика факультетерінің студенттеріне, синергетика саласында ғылыми зерттеулермен айлысушыларға арналған.

АЛҒЫ СӨЗ

Бұл кітапша 1997 ж. орыс тілінде жазық көрген шағын басылым* негізінде жазылды.

Бейсызық физика бастамалары ретінде қазіргі кезде айтылып жүрген "Синергетика", "Өзқауым теориясы", "Динамикалық хаос", "Ашық жүйе теориясы", "Күрделі жүйелер эволюциясы", т.с.с. атаулары әртүрлі, бірақ түбі бір ғылым бағыттарының физикалық негіздері ұсынылып отыр. Соңғы үш жылда бейсызық физикадан әль-Фараби атындағы Қазақтың мемлекеттік Ұлттық университетінде, Е.А.Бүкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университетінде, Ш.Е.Есенов атындағы Ақтау мемлекеттік университетінде алғашқы арнаулы курстар оқылды. Бұл кезеңде Қазақ Республикасының Ұлттық Ғылым Академиясында, еліміздің бірқатар университеттерінде аталған тақырыптарға байланысты халықаралық конференциялар өтті, ашық жүйе эволюциясының проблемаларын зерттеуге арналған мемлекеттік гранттар бөлінді. Осыған орай жастарды ғылымның болашағы мол бір бағытымен тікелей Ана Тілімізде таныстыруды қажет көрдік.

Әрине, жаңа ғылым үшін тек бір ғана тіл білу жеткіліксіз. Бірақ, зерттеушінің өз тілінде қалыптасқан ғылымның негізгі түсініктері, принциптері мейлінше түбегейлі сенімге айналатынын ескерген жөн. Сондықтан ғылыми термин мәселесіне де көңіл бөлініп, қосымша ретінде орысша-қазақша тақырыптық қысқаша сөздік келтірілді. Болашақта осы кітапшада қарастырылған мәселердің жан-жақты ғылыми негіздерінің және оларға сәйкес оқу-әдістеме құралдарының әр тілде көптеп жазылатынына күмән жоқ. Сондықтан ұсынылып отырған шағын еңбекті барлық жағынан алып қарағанда тек БАСТАМА деп қабылдауды сұраймыз.

Физика -математика ғылымының докторы,
профессор З.Ж.Жанабаев

---

* Жанабаев З.Ж. Лекции по нелинейной физике. -Алматы: "Қазақ университеті". -1997 -72 с.

КІРІСПЕ

"Бейсызық физика" жалпылай танылған термин болып табылады. Қазір дүние жүзінің жетекші ғылыми басылымдары аталған тақырыпта топтама материалдар жариялайды. Алғашқы монографиялар, шолулар басылды.

Осы пәннің мазмұнын сыртқы ортамен заттай, энергиямен және информациямен алмасып отыратын ашық сызықты емес жүйелердің статистикалық физикасының мәселелері анықтайды.

Бұл тақырыпқа бейсызық тепе-теңсіз құбылыстарды қарастыра отырып, термодинамикалық тұрғыдан келуге болады. Қарастырылып отырған мәселелердің аумағын жалпы физикалық тұрғыдан қарағанда бейберекеттік пен реттілік физикасы деп атайды. Жалпы айтқанда, кәзіргі жалпы ғылыми жаңа методология-синергетика бейсызық физиканың жетістіктеріне негізделеді. Синергетика-материяның және оның қозғалысының өзқауым (самоорганизация) теориясы, басқаша айтқанда бейберекеттен реттіліктің пайда болу теориясы.

Шындығында, барлық физикалық құбылыстарды жеткілікті дәрежеде нақтылай қарасақ, олардың бәрі де сызықты емес. Алайда, сызықты емес құбылыстар физикасы мен "бейсызық физика" бірдей мағыналы терминдер бола алмайды. Бейсызық физика күрделі жүйелердің мейлінше жалпы категорияларын, қасиеттері мен заңдылықтарын тағайындайды. Мысалға, барлық ашық бейсызық жүйелер үшін әуейі, (странный) аттрактор, бифуркация, динамикалық бейберекеттік, алмасу /перемежаемость/, фрактал, мультифрактал, информация, энтропия, өзқауым, солитон, квазибөлшек түсініктері ортақ болып табылады.

Оқу құралында бейсызық физиканың бастамасын құрайтын жоғарыда аталған негізгі түсініктердің мәні баяндалады. Оқырмандарды кәзіргі осынау өзекті мәселелермен таныстыру мақсатында фракталдар мен мультифракталдар теориясы, өзқауым жүйелердің информациялық талдауы, синергетика принциптерін әлеуметтік жүйелерге қолдану туралы нәтижелер келтірілді.

1. Бейсызық маятник. Динамикалық жүйелердің стохастальнуы

Бейсызық маятник мысалымен детерминдік, айнымалылары кездейсоқ емес теңдеулермен сипатталатын бейсызық жүйелердегі қозғалыстың бейберекеттену себептері қарастырылады.

Маятниктің тепе-теңдіктен x аз ауытқуы мына сызықтық теңдеумен сипатталады:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x=0, \qquad (1.1)$$

мұндағы t - уақыт, ω_0 - меншікті жиілік. (1.1) - теңдеудің шешімі гармониялық функциялар арқылы жазылады. Егер ауытқу елеулі болса, онда бейсызық теңдеуді пайдалануға тура келеді:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 \sin x=0. \qquad (1.2)$$

(1.2)- теңдеудің шешімі жалпы жағдайда бір мәнді емес. Фазалық (кезеңдік) кеңістіктегі (жылдамдық-координата айнымалылар кеңістігінде) қарапайым талдау сапалық жағынан жаңа нәтижелер тағайындауға мүмкіндік береді.

(1.2)- теңдеуді әрқайсысы бірінші реттік екі дифференциалдық теңдеулер жүйесі арқылы жазамыз:

$$\frac{d\upsilon}{dt}+\omega_0^2 \sin x=0, \frac{dx}{dt}=\upsilon. \qquad (1.3)$$

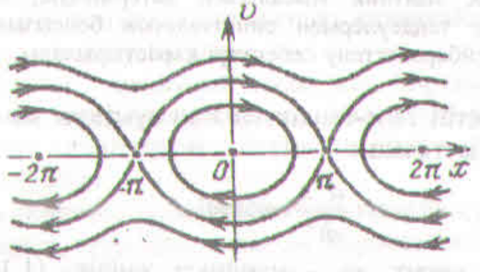
(1.3)- жүйеден уақыт дифференциалын алмастырсақ:

$$\upsilon d\upsilon+\omega_0^2 \sin x dx=0. \qquad (1.4)$$

$(\upsilon,\upsilon_0),(0,x)$ шектерінде (1.4) формуланы интегралдау мынаны береді:

$$\frac{\upsilon^2}{2}-\omega_0^2 \cos x=\frac{\upsilon_0^2}{2}-\omega_0^2=H, \qquad (1.5)$$

мұндағы H-гамильтониан (энергия функциясы). $H<\omega_0^2$ мәндерінде кезеңдік траекториялар ($\upsilon=\upsilon(x)$ тәуелділігі) маятниктің тербелісін сипаттайтын тұйық сызықтарды береді (финиттік қозғалыс, 1-сурет).



1-сурет.

Фазалық траекторияларда ерекше нүктелер пайда болады: орталық (центр типті $\upsilon=0, x=2\pi n$), ер, тұғыр (седло) типті $(\upsilon=0, x=2\pi(n+1); n=0,\pm1,...)$. Егер қандай да бір аумақ нүктені қоршайтын, бір-бірімен қиылыспайтын тұйық кезеңдік траекториялармен тегістей толтырылса, ол нүктені орталық (центр) деп атайды. $\upsilon x=const$ теңдеуімен берілетін гиперболаға ұқсас, кезеңдік траекториялардың шекті саны түйісетін ерекше нүкте тұғыр (седло) деп аталады.

$H>\omega_0^2$ мәндерінде кезеңдік траекториялар толқындық сызыққа айналады, ол маятниктің айналмалы қозғалысына (ифиниттік - финиттік емес қозғалыс) сәйкес келеді. $H=\omega_0^2$ мәнінде траектория қозғалыстың екі әртүрлі типін(түрін) бөлетін сепаратрисаға (сарапшыға) айналады.

Сепаратрисадағы шешім (1.5) теңдеуінен

$$H=H_s=\omega_0^2 \tag{1.6}$$

шарты арқылы алынады. $\upsilon=\dfrac{dx}{dt}$ екенін ескеріп мынадай теңдеу аламыз:

$$\frac{dx}{dt}=\pm2\omega_0 cos(x/2). \tag{1.7}$$

Бұл теңдеудің бастапқы шарттар $t=0$, $x=0$ болғандағы шешімі [1]:

$$x=4arctge^{\pm w_0 t}-\pi . \tag{1.8}$$

Екі таңбаға екі сепаратриса (тұғырға кіретін және одан шығатын) сәйкес келеді. (1.7) формуланы пайдаланып (1.8) өрнектен жылдамдықты табамыз :

$$cos\frac{x}{2}=cos\left(2arctge^{\pm w_0 t}-\frac{\pi}{2}\right)=sin\left(2arctge^{\pm w_0 t}\right),$$

$$sinarctgx=x/\sqrt{1+x^2},$$

$$\upsilon=\pm2\omega_0/ch(\omega_0 t). \tag{1.9}$$

Гиперболалық косинус арқылы өрнектелген бұл шешім бейсызық ортада пайда болатын, оқшауланған толқынды-солитонды сипаттайды.

Орнықты қозғалысты сипаттайтын тұйық кезеңдік траекториялар аттракторлар (ағылшын тілінен орысша аудармасы "притягивающие объекты") деп аталады. Оған кезеңдік кеңістіктегі шектік циклдер мен қозғалмайтын нүктелер жатады (1-сурет).

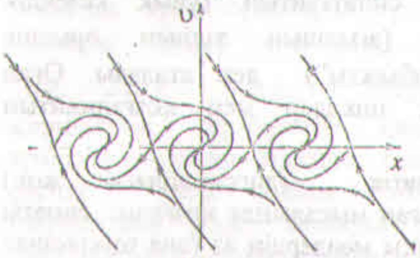
Бейсызық консервативтік (диссипациясы жоқ) жүйенің жоғарыда қарастырылған мысалында қозғалыс сипаты бір мәнді болмағанымен бастапқы мәндердің аз ғана өзгерісінде кезеңдік нүктенің бір траекториядан басқа траекторияға өтуі алғашқы қарастырылған траекторияға өте жақындығымен қорытындыланатын қандайда бір орнықтылық қалыптасады.

Диссипацияның болуы қозғалыстың кезеңдік бейнесін сапалық тұрғыдан өзгертеді. Кәдімгі аттрактор барлық траектория уақыт бойынша оның әрбір нүктесі арқылы өтетін, бастапқыда бір-біріне барынша жақын нүктелердің арасы жеткілікті үлкен уақыт аралығында елеулі қашықтыққа айналатын өте күрделі құрылымы бар әуейі (странный) немесе беймәлім аттракторға ауысады. Әуейі аттракторларды алғаш рет сұйықтардың жылулық конвенциясының қарапайымдалған үш өлшемді теңдеулері негізінде Е.Лоренц байқады. Диссипативтік жүйенің кезеңдік суретінің сапалық өзгерісін (1.2) - теңдеуді үйкелісті ескеріп зерттеу арқылы байқауға болады. Үйкеліс коэффициенті c шамасын енгізіп теңдеуді мына түрде жазамыз.

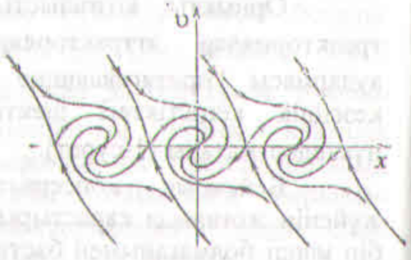
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2\sin x+c\frac{dx}{dt}=0, c>0 . \quad (1.10)$$

Енді орталық түріндегі ерекше нүктелердің аумағында тұйық кезеңдік траекториялар әлсіз үйкеліс жағдайында спиральға өтеді, ал күшті үйкеліс жағдайында кезеңдік траекториялар белгілі бағыттағы ерекше нүктелерге "кіретін" траекторияларға айналады (2-сурет).

Үйтқымалы сыртқы күш әсер етсе алдымен сепаратриса сызығы бұзылады, үйткені оның маңы орнықсыз, сапа жағынан әртүрлі таекториялар бар. Кезеңдік сурет күрделі құрылымы бар бейберекет объектке айналады (3-сурет). Реалды жүйелерде ұйытқымалы сыртқы күш ылғи да бар, ол жағдай келесі пунктте келтірілген.



2-сурет.



3-сурет.

Сонымен, бейсызық және шекті дәлдікпен берілген реалды бастапқы шарттар жүйедегі дәл теңдеулермен өрнектелетін қозғалыстың ретсіздігіне әкеледі. Қазір "динамикалық (детерминделген) бейберекеттік теориясы" деп аталатын ғылымның саласы дамып келеді. Жалпы түрде математикалық тұрғыдан қарағанда мәселе төмендегідей теңдеулермен сипатталатын жүйенің дамуын зерттеумен тұжырымдалады:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt}=\vec{f}(x),\vec{x}(t)=(x_1(t),...,x_N(t)), \quad (1.11)$$

мұндағы $\vec{x}-N$ - өлшемді $\vec{x}(0)$ бастапқы мәні бар вектор.

2 . Бейнелеу және динамикалық бейберекеттік

Бейсызық құбылыстардың дифференциалдық теңдеулерінің қарапайым үзілісті үлгілері арқылы динамикалық бейберекеттіктің ең жалпы заңдылықтары тағайындалады.

2.1. Кезеңдік кеңістікте динамикалық жүйенің дамуын ең қарапайым түрде $p(t)$, $q(t)$, (жалпыланған импульс мен координат) үзіліссіз функциялар көмегімен емес, олардың үздікті мәндері арқылы іздестірейік. Ол үшін уақыт үздікті ($t=t_0,t_1...t_i$) өзгереді деп аламыз.

Мұндай жүйелердің мысалы ретінде кезекті жүрістен кейін күйі өзгеріп отыратын шахмат ойынының жағдайын алуға болады. Егер t_i уақыт кезеңінде $P_i=P(t_i)$, $q_i=q(t_i)$ белгілі болса,

$$(P_{i+1}, q_{i+1}) = T_i(P_i, q_i) \quad (2.1)$$

қатынасы T_i оператор арқылы t_{i+1} уақыт мезетіндегі кезеңдік нүктені анықтайды. T_i операторының түрін, негізінде P_i, q_i -дің белгілі тізбекті мәндерінен жуықтап табуға мүмкіндік бар. (2.1) қатынасы Пуанкаре бейнелеуі (отображение) деп аталады, ол фазалық кеңістіктің өзіне өзін бейнелеуін береді және қозғалыс теңдеуінің дифференциалдық түрін үздікті түрге алмастырады. Жалпы жағдайда қозғалыстың дифференциалдық теңдеулерінен T_i операторының түрін анықтауға болмайды. Бұл бастапқы теңдеулерді бірінші дәрежелі теңдеулер жүйесіне ажыратып жазғанда ғана мүмкін. Мысалға, (1.2) - бейсызық маятник теңдеуін мынадай біріккен жүйе түрінде жазуға болады:

$$P_{i+1}=P_i-\omega_0^2\Delta t\cdot\sin x_i, x_{i+1}=x_i+\Delta t\cdot P_{i+1}. \quad (2.2)$$

мұндағы $P=m\upsilon, m=1, dP\to\Delta P=P_{i+1}-P_i$ т.с.с. Есептеудің дәлдігін қамтамасыз ету үшін $\omega_0^2(\Delta t)<<1$ теңсіздігін қанағаттандыратын Δt - ның аз мәні сайлап алынады.

Барлық динамикалық жүйелер үшін дұрыс болатын, үйтқымалы (сыртқы әсерлерді ескеретін) гамильтонианы бар (2.2) бейнелеуді мынадай универсал түрде жазуға болады :

$$H=\frac{1}{2}P^2-\omega_0^2\cos x-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(n\cdot\omega t),\omega=2\pi/\Delta t. \qquad (2.3)$$

Егер Дирактың дельта-функциясы үшін белгілі теңдікті ескерсек

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{t}{\Delta t}-n\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(n\frac{2\pi t}{\Delta t}\right). \qquad (2.4)$$

(2.3)-тегі үйтқу жүйеге әсер ететін тізбектелген күштің (δ-импульстар) периодтылығын (Δt - периодты) білдіреді.

Жаңа айнымалылар әсер (J) және бұрыш (Θ) шамасын енгіземіз:

$$J=\frac{1}{2\pi}\oint P(q,H)dq, S(q,J)=\int_0^q P(q,H)dq, \Theta=\partial S(q,J)/\partial J \qquad (2.5)$$

Жаңа айнымалылар арқылы гамильтониан мен қозғалыс теңдеулері мына түрде жазылады:

$$H=\frac{1}{2}J^2-\omega_0^2\cos\Theta-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(n\omega t), \qquad (2.6)$$

$$\frac{dJ}{dt}=-\omega_0^2\sin\Theta\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{t}{\Delta t}-n\right), \frac{d\Theta}{dt}=J. \qquad (2.7)$$

Екі δ-функциялар арасында $J=const$, $\Theta=J^* t+const$. δ-функция арқылы өткенде Θ шамасы үздіксіз болып қалады, ал J айнымалы $\omega_0^2\sin\Theta$ шамасына өзгереді, сондықтан

$$J_{i+1}=J_i-\omega_0^2\sin\Theta_i,(\mathrm{mod}\,2\pi), \qquad (2.8)$$

$$\Theta_{i+1}=\Theta_i+J_{i+1}, \Delta t=1.$$

(2.8) жүйесі Чириков-Тейлордың стандартты бейнелеуі (отображение) деп аталады.

Үздікті теңдеулерге ауысу сыртқы периодты күштерді қосқанмен бара-бар екен. Осы себептен ең қарапайым дифференциал теңдеулерге сәйкес келетін бейнелеуді зерттеу бейсызық жүйелердің қасиеттері туралы жаңа мазмұнды нәтижелер береді.

Логистикалық бейнелеу

Қарапайым бейсызық теңдеудің үздікті айырымдық үлгісін қарастырайық:

$$X_{i+1}=\lambda X_i(1-X_i). \qquad (2.9)$$

(2.9) бейнелеу логистикалық деп аталады, себебі ол әртүрлі текті бейсызық жүйелердің сипаттамаларының заңдылықтарын универсалды түрде сипаттайды. Мысалы, периодты соққылар әсер ететін ротатор қозғалысы, түйық ортадағы биологиялық объектінің популяциясы, банк жинағының өсімі және т.б. құбылыстар осы бейсызық теңдеумен сипатталады. М. Фейгенбаум (2.9)- формуладан алынатын бейберекет x-мәндерінің құрылымын зерттеді. Ол квадраттық функцияның тек бір ғана максимумы болу шарты орындалған жағдайда нәтиженің функцияның нақты түріне тәуелді болмайтындығын көрсетті , [2]. Сондықтан біз ең қарапайым бейнелеуді қарастырамыз:

$$X_{i+1}=1-\lambda X_i^2. \qquad (2.10)$$

Оның λ- параметріне қатысты универсал қасиеттерін іздейміз. X_i-дің жоғарғы дәрежелі мәндерін ескермесек

$$X_{i+2}=1-\lambda+2\lambda^2X_i^2. \qquad (2.11)$$

(2.11) - ді алғашқы түрде жазсақ

$$X_{i+1}=1-\lambda X_i^2$$
$$\lambda_1=2\lambda^2(\lambda-1)\equiv\varphi(\lambda) \qquad (2.12)$$

Осы операцияны

$$X_i \to X_i/\alpha_i, \alpha_i = 1/(1-\lambda_i) \quad (2.13)$$

масштабтық көбейтінділермен қайталасақ мынаны аламыз:

$$X_{i+2^n} = 1-\lambda_n X_i^2, \lambda_n = \varphi(\lambda_{n-1}). \quad (2.14)$$

λ_n-нің мәнін табу үшін X_* қозғалмайтын нүктенің болу шартын пайдаланамыз. Ал ол μ мультипликатордың теріс таңбасы үшін

$$X_* = X_{i+1} = X_i, \mu = \left.\frac{dX_{i+1}}{dX_i}\right|_{X_i = X_*} = -1 \quad (2.15)$$

орнықты болмайды. $\mu=-1$ теңдігі период өткен соң бастапқы үйытқудың абсолют шамасы өзгермей, таңбасының өзгеретіндігін білдіреді. Тағыда бір периодтан соң ол қайтып өз мәнін қабылдайды, сондықтан периодтың екі еселену бифуркациясы болады деп айтады.

(2.10) мен (2.15) - тен мыналар шығады:

$$X_* = 1-\lambda_* X_*^2, -1 = -2\lambda_* X_i, \lambda_* = 3/4 \equiv \lambda_{*1}, \quad (2.16)$$

$$\lambda_{*1} = \varphi(\lambda_{*2}), \lambda_{*n-1} = \varphi(\lambda_{*n}).$$

$n \to \infty$ жағдайында λ_{*n} сан тізбегінің шегі мына теңдеу түбірі ретінде табылады:

$$\lambda_{*\infty} = \varphi(\lambda_{*\infty}), 2\lambda_{*\infty}^2 - 2\lambda_{*\infty} - 1 = 0, \lambda_{*\infty} = 1{,}37. \quad (2.17)$$

λ_{*n}-нің тізбекті кризистік мәндерінің айырымы универсалды түрде өзгереді:

$$\delta = \frac{\lambda_{*,2n+1} - \lambda_{*,n}}{\lambda_{*,n+2} - \lambda_{*,n+1}} \to \frac{\lambda_{*n} - \lambda_*}{\lambda_{*,n+1} - \lambda_*} \to \varphi'(\lambda_* \infty) = 4+\sqrt{3} = 5{,}73. \quad (2.18)$$

Тұрақты шекке масштабты көбейткіштер де ұмтылады:

$$\alpha_n \to \alpha_\infty, \alpha_\infty = 1/(1-\lambda_{*\infty}) = -2{,}7 \quad (2.19)$$

δ, α_∞ Фейгенбаум сандарын (2.10) бастапқы бейнелеуді көп рет компьютерлік итерациялау арқылы дәлдеуге болады. Әртүрлі сипаттағы тәжірибелер (жылулық конвекция, бейсызық электр тізбегіндегі үйтқулар және т.б.) осындай универсал тұрақтылардың болатындығын тұжырымдайды. Гидродинамикалық есептерде λ_* мәні Рейнольдс санының кризистік мәндерімен байланысты.

Логистикалық (2.9) бейнелеу үшін $\mu=-1$ болғанда $\lambda>0$, ал $\mu=+1$ болғанда $\lambda<0$ (яғни бұл жағдай орындалмайды) екендігіне көз жеткізіңіз.

3. Динамикалық бейберекеттіктегі алмасу

Динамикалық бейберекеттікпен қосарлана жүретін ерекше құбылыс- алмасудың мәні қарастырылады, оны сипаттайтын қарапайым бейнелеулер келтіріледі.

3.1. Алмасу құбылысының табиғаты

Салыстырмалы үлкен амплитудалы бейберекет үйтқулардың ретті сигналдармен кездейсоқ кезектесу құбылысын алмасу деп атайды. Физикалық тұрғыдан бұл құбылыс бейсызық ортада әртүрлі кеңістік-уақыт бойынша масштабтағы құрылымдардың түзілуін және олардың байқалу ықтималдығының таралуының мультипликативті еселенген сипатын білдіреді. Кездейсоқ шаманың байқалатын барлық мүмкін мәндерінің ішінен кейбіреуінің ықтималдығы аз, амплитудасы үлкен болады, яғни бір-бірін күшейтетін көптеген максимал амплитуданың бір мезгілде байқалу ықтималдылығы ықтималдылықтарды көбейту теориясымен анықталады.

Математикалық тұрғыдан алмасу (2.15) мультипликатордың $\mu=+1$ мәнінде периодты қозғалыстың бұзылуы ретінде сипатталады. Осы мақсатта ε параметріне тәуелді бейнелеу функциясын мына түрде жазамыз:

$$X_{i+1} = \varepsilon + X_i + X_i^2, \varepsilon = R - R_*. \quad (3.1)$$

R, R_* параметрлерінің мағынасы гидродинамикада Рейнольдс саны мен оның кризистік мәніне сәйкес келеді. $\varepsilon \approx 0$

болғанда (3.1) функциясы $X_{i+1}=X_i$ түзуімен жанасады. $X_i=0$ жанасу нүктесі үшін, (3.1) ден $\mu=+1$ нәтижесін аламыз. $\varepsilon<0$ жағдайында (3.1) функциясының екі қозғалмайтын нүктесі болады:

$$X_{*1}=-(|\varepsilon|)^{1/2}, X_{*2}=+(|\varepsilon|)^{1/2}, \qquad (3.2)$$

X_{*1} - орнықты, X_{*2} - орнықсыз периодты қозғалысқа жауап береді. $\varepsilon\sim0$ жағдайында мультипликатор екі нүктеде де $+1$-ге тең, екеуінің де периодты қозғалысы қосылып кетеді. Бұл жағдай кері жанама бифуркациясы деп аталады, ал ол қозғалмайтын нүктелері екі еселенетін қосарлану бифуркациясына қарама-қарсы құбылыс. $\varepsilon>0$ мәнінде қозғалмайтын нүктелер жойылып, комплексті болып кетеді.

Алмасу құбылыстарының ретті аралықтар ұзақтығын (T) шамалауға болады. (3.1) үздікті айырма теңдеуін дифференциалдық түрде жазып, яғни $(X_{i+1}-X_i)$-ді dx/dt үзіліссіз айнымалы бойынша туындымен ауыстырсақ:

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon+x^2 \qquad (3.3)$$

X_{*1}, X_{*2} шектерінде интегралдап, мынаны аламыз:

$$T=\varepsilon^{-1/2} arctg\left(x\varepsilon^{-1/2}\right)\Big|_{x_{*1}}^{x_{*2}}, T\sim\varepsilon^{-1/2}, \qquad (3.4)$$

3.2. Квазистационарлық құбылыстардың алмасуы үшін бейнелеу

Динамикалық бейберекеттіктің квазистационарлық табиғаты жиі кездеседі: пайда болған және жойылған құрылымдардың саны теңдесіп отырады. [3,4] еңбектерде турбулентті құйында пайда болған және жойылған ұсақ құйындар саны өзара әруақытта тең, оның күйі виртуальды (квазистационарлы) болатындығы дәлелденген. (2.9) логистикалық бейнелеу $(1-x_i)$ көбейткіші арқылы физикалық шаманың тұйық ортада өсуінің шектелуін ғана ескереді.

Квазистационарлық құбылыстар үшін мына бейнелеуді қолдануға болады:

$$x_{i+1}=\lambda x_i(1-x_i)(1+x_i)=\lambda x_i(1-x_i^2). \qquad (3.5)$$

Құрылымның пайда болуы және жойылуы тәуелсіз оқиғалар, олардың бір мезгілде байқалу ықтималдығы ықтималдықтарды көбейту теоремасымен анықталады:

$$P(x_i^+)=(1+x_i)/2, P(x_i^-)=1-x_i,$$

$$(3.6)$$

$$P(x_i^+x_i^-)=(1-x_i^2), x_i\le1; \lambda/2\to\lambda.$$

(3.5) бейнелеуі Фейгенбаум типті бейнелеуден басқаша, кубтық бейсызықтық қасиеті бар.

(3.5) формуласы [5] - еңбекте квазиекі өлшемді бет ауданы үйтқымалы гидродинамикалық құйын үшін жазылған қозғалыс теңдеуі және үздіксіздік шартынан алынды. Аз ауытқу жағдайы үшін мына шамалар қолданылады:

$$x_i\sim\pm(R_0/R_*) \qquad (3.7)$$

$x_i, x_{i+1}-i, i+1$ уақыт мезеттеріндегі құйындар саны, R_0 - Рейнольдс саны, R_* - оның ламинарлық-турбуленттік көшуге сәйкес кризистік мәні, $+,-$ таңбалары құйындық құрылымдардың тууы мен жойылуына сай келеді. Жетілген турбуленттік үшін $(R_0>>R_*)$ Ландаудың [2] шамалауы белгілі:

$$X_i\sim(R_0/R_*)^{9/4}, \qquad (3.8)$$

Квазистационарлық құбылыстар үшін бейнелеуді талдау мына түрде ыңғайлы:

$$x_{i+1}=x_i(x_i^2-A), \qquad (3.9)$$

x, A шамаларын қажетті түрде қайталап нормалағаннан кейін (3.9) өрнегі (3.5) - формулаға айналады. A тұрақтысы динамикалық кластердегі құйындар санының ең үлкен мүмкін мәнін анықтайды. $A\ge4(x_i=1)$ жағдайында құйын саны уақыт бойынша шектеусіз өседі, кластер стохастикалық объектіге айналады. $A=2$ $(x_i=1)$ жағдайында $x_{i+1}=\pm1$ кезектескен мәндер алынады. Мұндай қасиетке құйын квазистационар /виртуальды/ күйде ие болады. $A=3$ $(x_i=1)$ жағдайында құйындардың қосақталған күйіне сәйкес $x_{i+1}=-2$ орнықты циклі келеді. Теріс таңба құйындардың қосылуын, еркіндік дәрежесінің жойылуын білдіреді. (3.9) - дан шығатын квазиекіөлшемді гидродинамикалық құйындардың (үйытқымалы бетті) бұл қасиеттері [5] еңбекте тәжірибелермен толықтай дәлелденетіндігі көрсетілген.

Стандартты әдістермен [6] жүргізілген сандық талдау (3.5) бейнелеудің (2.9) формуладан өзгешелігін - аз ауытқу жағдайында бейберекеттікке алмасу арқылы ауысуды сипаттайтындығын көрсетті. Фазалық суретте $(x_i=x_i(\lambda)$ тәуелділігі) алғашқы екі бифуркациядан $(\lambda\approx2,2)$ бастап "құлаулар" байқалады.

Сұйықтардың реалды ағысында алмасу құйынды құрылымдардың кезектесіп ауысуы ретінде байқалады. Шала өткізгіштердегі төменгі жиілікте электр ағысы күшінің дірілі (фликкер-шум) де алмасу құбылысына жатады. Қарастырылған қарапайым әдістерді табиғаттың химиялық, биологиялық, функционалды-информациялық алмасу құбылыстарын талдауға қолдануға әбден мүмкін болады.

4. Фракталдар

Фракталдар, фракталдардың өлшемділігі туралы түсініктер енгізіледі және турбуленттік тасымалды сипаттауда фракталдарды қолданудың мысалдары келтіріледі.

4.1. Құрылымдық, өзіне-өзі ұқсас иерархиялық сатылық ішкі құрылысы бар объектілерді фракталдар деп атайды. Мұндай объектілерге күрделі заттардың молекулалық құрылымы, турбуленттік құйын, жағалау сызықтары, бұлттар, галактикалар және т.б. жатады. Фракталдық қасиет бейсызық процестер мен құбылыстарды сипаттайтын фазалық кеңістіктерде, күрделі жүйелердің функционалдық әрекетінде, адрондардың әсерлесуінде, әуейі аттрактордың түзілуінде,

қоғамның экономикалық көрсеткіштерінің өзгеруінде байқалады.

Фракталдардың дәл және толық анықтамасы әзірге жоқ Фракталдар теориясының негізін салушылардың бірі Б. Мандельброт [8] фрактал анықтамасының төменгідей вариантын ұсынды: Фрактал деп тұтас күйіне белгілі бір мағынада ұқсас болатын бөліктерден тұратын құрылымды айтады.

Б. Мандельброттың алғашқы ұсынған варианты мынадай еді: Фрактал деп өлшемділігі Хаусдорф-Безикович өлшемділігінен ылғида үлкен болатын жиынды айтады.

Бұл анықтама топологиялық өлшемділікпен (d) бірге "фракталдық өлшемділік" (D) деген ұғымдарды енгізуді талап етеді. Қарапайым евклидтік кеңістікте нүкте, сызық, квадрат, куб 0,1,2,3-ке тең топологиялық өлшемділіктермен сипатталады. Сондай-ақ осыларға сәйкес метрлік (өлшемдік) сипаттамаларды (ұзындық, көлем, аудан) да енгізуге болады. Бірақ, сынық сызықты қисықтың (жағалау сызығы, 4-сурет) ұзындығы қалай өлшенеді? Өлшеудің нәтижесінің қандай болатындығы ұзындық масштабының таңдап алуына тікелей тәуелді екендігі көрініп тұр. Егер ең кішкентай буынның ұзындығы мейлінше аз болса $(\delta\to0)$, онда толық ұзындық барынша үлкен болады. Мұндай күрделі объектілердің метрлік сипаттамасын мына формуламен анықталатын Хаусдорфтық, немесе, фракталдық өлшемділік атқарады:

$$D=\lim_{\delta\to0}\frac{\ln N(\delta)}{\ln 1/\delta}, \tag{4.1}$$

$N(\delta)$-қарастырылып отырған объектінің оның өзіне-өзі ұқсас қасиетін толық қамтитын үяшықтардыңең аз саны, δ - үяшық қабырғасының ұзындығы (шар радиусы),

Нүкте, сызық, квадрат, куб үшін

$$N(\delta)=\delta^{-0},\delta^{-1},\delta^{-2},\delta^{-3}, \tag{4.2}$$

сондықтан (4.1) - формуладан $D=d=0,\ 1,\ 2,\ 3$ нәтижелерін аламыз.

4-сурет. Географиялық картадан алынған Норвегия жағалауының кескіні.

4.2 Модельдік фракталдар үшін (4.1) формуласын қолдану мысалдарын келтіреміз.

Кантордың жиыны (нүктелер жиыны) әрбір қалған сызықтың 1/3-ін алып тастағанда пайда болады. Осы процесті қайталай отырып (5-сурет) өзұқсас жиын элементтерін аламыз, ал олардың әрқайсы үшін: $N(\delta)=2, \delta=1/3,$ осыдан жиынның фракталдық өлшемділігі:

$$D=\ln 2/\ln 3, \text{ яғни } 0<D<1 \tag{4.3}$$

Кохтың симметриялық өзұқсас деформациясы (6,а- сурет) мынадай алгоритммен іске асады. Бірлік ұзындығы бар алғашқы сызық тең *4* бөлікке бөлінеді, ортаңғы кесінділер *1/4* салыстырмалы қашықтықта симметриялы орналасады. Әрбір элемент тізбекті түрде осындай деформацияға түседі. Бұл жағдайда $N(\delta)=8, \delta=1/4$, және Кохтың симметриялық қисығының фракталды өлшемділігі:

$$D=\ln 8/\ln 4=3/2, 1<D<2. \tag{4.4}$$

Асимметриялық деформация үшін (6,б- суреттегідей тек бір бағытта болатын)

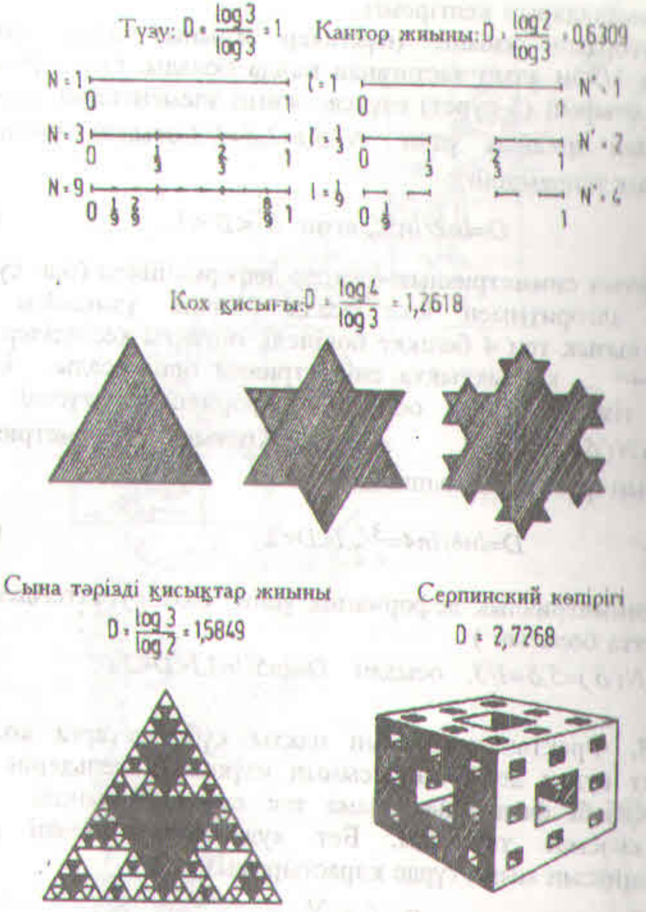
$$N(\delta)=5, \delta=1/3, \text{ осыдан } D=\ln 5/\ln 3, 1<D<2. \tag{4.5}$$

4.3. Фрактал теориясын нақты құбылыстарға қолдану үшін бет аудан деформациясының өзұқсас модельдерін құру қажет, себебі физикалық шама тек сызық бойынша емес, бетте, көлемде таралады. Бет ауданның өзіне-өзі ұқсас деформациясын мына түрде қарастырамыз

$$\frac{S_n}{S_0}=\left(\frac{\delta_0}{\delta_n}\right)^{\gamma}, \tag{4.6}$$

мұндағы S_n, δ_n – n-ші деформациядан кейінгі беттің ауданы мен ұяшықтың ең аз өлшемі. γ шамасы скейлинг көрсеткіші деп аталады. Кризистік құбылыстар (фазалық ауысулар) теориясында масштабты-инвариантты құбылыстар скейлингтік деп айтылады. (4.6) -ға сәйкес келетін бет элементтерінің саны:

$$N(\delta_n)=S_n/\delta_n^{d-1}, \tag{4.7}$$



5- сурет.

мұндағы d-деформацияланған бет еніп отырған кеңістіктің топологиялық өлшемділігі. Осыдан кейін Хаусдорф өлшемділігін анықтауға болады:

$$D=\lim_{\delta_n\to 0}\frac{\ln N(\delta_n)}{\ln 1/\delta_n}=\lim_{\delta_n\to 0}\frac{\ln(S_0\delta_0^{\gamma}/\delta_n^{\gamma+d-1})}{\ln(1/\delta_n)}=d-1+\gamma \qquad (4.8)$$

(4.8) формуланы қолданып отырып, скейлинг көрсеткішін оның деформация түрінен тікелей табуға болады.

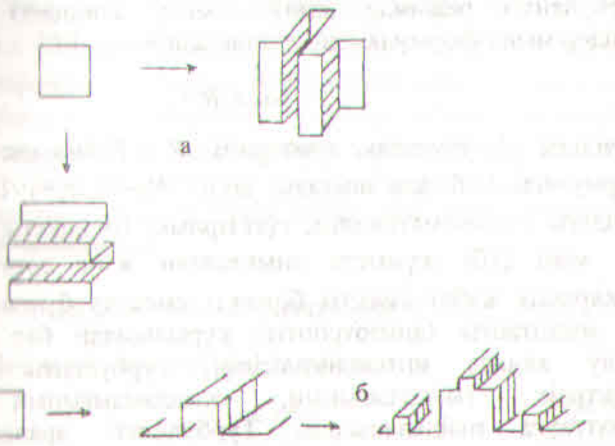
Беттің симметриялық деформациясының бір актісінде ауданы 3 есе артады (деформация екі бағытта, беттің ішкі, сыртқы жағында жүреді), ұяшық өлшемі 4 есе кемиді, (6,а - сурет) осыдан

$$\gamma=\gamma_0=\frac{\ln(S_n/S_0)}{\ln(\delta_0/\delta_n)}=\frac{\ln 3}{\ln 4}=0,7925. \qquad (4.9)$$

бір бағытта іске асатын, бір жақты бет деформациясы үшін (6,б сурет)

$$\gamma=\gamma_{\perp}=\ln(5/3)/\ln 3=0,465. \qquad (4.10)$$

$\gamma_\perp$ мәндерін фракталды өлшемділік D-ны біле отырып, (4.8) формуласынан да табуға болады.



6-сурет. Бет ауданның масштабты – инвариантты изотропты(а) және анизотропты(б) деформациялану модельдері.

Кеңістікті объектінің ($d=3$) симметриялық механизм бойынша изотропты деформациясын елестетсек бет элементтерінің саны 48-ге тең, (беттің сыртқы және ішкі жақтары ескеріледі), ұяшық өлшемі - 1/4 осыдан,

$$D=\ln 48/\ln 4, \gamma_0=D+1-d=\ln 3/\ln 4=0{,}7925. \quad (4.11)$$

Анизотропты (бір жақты) деформация үшін

$$D=\ln 5/\ln 3, d=2, \gamma_0=D-1=(\ln 5/3)/\ln 3=0{,}465. \quad (4.12)$$

Жоғарыда әртүрлі тәсілдермен табылған $\gamma_0, \gamma_\perp$ - мәндері табиғаты түрліше бейсызық бейберекет құбылыстардың универсал сипаттамалары болып табылады. Мәселенің мәнісі қолданылған қарапайым скейлинг модельдерінің энтропия максимумы принципіне сәйкес келетіндігінде жатыр. Ал бұл принцип динамикалық жүйелер стохасталынған (бейберекеттелгенде), мысалға, турбулентті араласуда орындалады. Информациялық энтропия (немесе құбылысты сипаттауға қажетті информация) қолданылған тік бұрышты импульстермен салыстырғанда импульстің қалған кез-келген түрлері үшін кем (минимум) болады. [9] жұмыста жетілген турбулентті режимде жылу алмасу жөніндегі тәжірибелік мәндер мына формуламен жалпыланған:

$$Nu=CR^{\gamma_0}. \quad (4.13)$$

Мұндағы Nu -Нуссельт критерийі, R - Рейнольдс саны. (4.13) формуласы (4.6)-дан шығады, егер $Nu \sim S_n, \delta_n \sim \nu/U$ деп алсақ, мұндағы ν-кинематикалық тұтқырлық, U-сипатты жылдамдық. $\gamma_\perp$ мәні [10] жұмыста анықталған және сорғы ағын, із, шекаралық қабат сияқты біртекті емес турбулентті ағыстағы ірі масштабты (анизотропты) құрылымдар бар жағдайында жылу алмасу интенсивтілігінің, турбулентік энергияның спектрлік тығыздығының, жылдамдығының таралуын сипаттауға пайдаланылды. Турбулентті араласудың таза анизотропты моделі $(\gamma=\gamma_\perp)R$-дің салыстырмалы аз мәндері жағдайында іске асатын ауысу режимдері үшін қолданылады, ал изотропты модель $(\gamma=\gamma_0)-R$ -дің үлкен мәндері үшін сай келеді.

5. Динамикалық бейберекеттің статистикалық сипаттамалары

Кезеңдік сурет, Ляпунов көрсеткіші, таралу функциясы корреляциялық және спектрлік функциялар анықтамасы беріледі, бұл түсініктердің мағынасы талқыланады. Көрсетілген сипаттамалардың сандық анықталу алгоритмдері жеке қарастырылады.

5.1. Кезеңдік фазалық сурет

Реттеуші параметр α-ның өзгеруіне сәйкес динамикалық бейберекеттіктің дамуын (эволюциясын) қарапайым логистикалық бейнелеу

$$x_{i+1}=\alpha x_i(1-x_i), \quad (5.1)$$

немесе (2.8) т.б., негізінде іздестіруге болады. α-ның салыстырмалы аз мәндерінде ($\alpha<3{,}6$) көп итерациядан кейін x_{i+1} орнықты x_* циклді мәндеріне жетеді. α-ның өсуімен ($\alpha>3{,}6$) x_* мәні бір мәнді болмайды, онан соң ($\alpha>4$) бейберекеттікке айналады (7–сурет). Фазалық суретті - $x_*(\alpha)$ тәуелділігін тереңдеп зерттеу бейберекеттіктің реттілікпен алмасып отыратындығын көрсетеді: α-ның өсуімен жаңадан орнықты циклдер пайда болады, алмасу құбылысы байқалады. Динамикалық бейберекеттіктің бұл қасиеті бейсызық бейнелеудің нақты түріне тәуелсіз байқалады, яғни табиғаты әртүрлі күрделі жүйеге тән.

5.2. Ляпунов көрсеткіштері

(5.1) бейнелеуін мына түрде жазайық:

$$x_{i+1}=f(x_i). \quad (5.2)$$

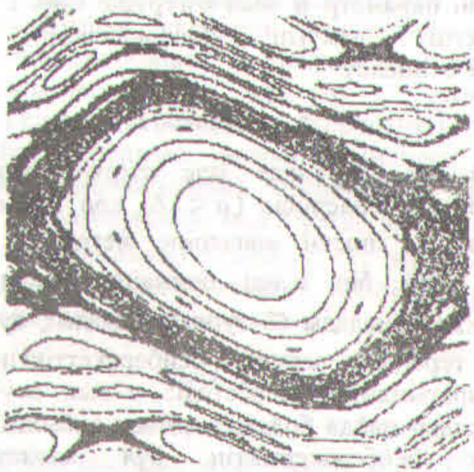
N интерациядан соң фазалық нүктелердің бір-бірінен ауытқуы мына түрде жазылады:

$$\varepsilon e^{N\lambda(x_0)}=\left|f^N(x_0+\varepsilon)-f^N(x_0)\right|. \quad (5.3)$$

$\lambda(x_0)-x_0$ нүктесіне қатысты Ляпунов көрсеткіші, ε-аз шама. (5.3)-тен $\lambda(x_0)$-ді дәл анықтауға болады:

$$\lambda(x_0)=\lim_{N\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{N}ln\left|\frac{f^N(x_0+\varepsilon)-f^N(x_0)}{\varepsilon}\right|=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}ln\left|\frac{df^N(x_0)}{dx_0}\right|. \quad (5.4)$$

$f^N(x_i)$ функциясын сандық дифференциалдаумен Ляпунов көрсеткіштерінің жиынын ($\lambda(x_i)$) алуға болады. [11] кітапта $\lambda(x_i)$ шамасын сандық анықтаудың тиімді алгоритмдері баяндалған.



7–сурет. Стандартты бейнелеудің (2.8- формула) фазалық суреті.

$\lambda(x_i)<0$ жағдайында кезеңдік траектория орнықты, $\lambda(x_i)=0$ x_i нүктелеріндегі бифуркацияларға сай келеді, $\lambda(x_i)>0$ жағдайында траектория бейберекеттенеді.

λ таңбасының өзгеру аймағын x_* қозғалмайтын нүктені пайдалана отырып іздеген қолайлы. Ол мына шарттан шығады:

$$x_*=f(x_*). \quad (5.5)$$

Қозғалмайтын нүктелердің орнықтылығының шарты

$$\frac{df(x_*)}{dx_*}<1 \quad (5.6)$$

болып табылады.

α параметрінің өсуімен бірге қозғалмайтын x_* нүкте орнықты болмай қалуы, яғни $\lambda(x_*)>0$ болуы мүмкін. $\lambda(\alpha)$ байланысы бар екендігін ескерсек Ляпунов көрсеткіші де бейберекеттіктің басталуын сипаттайтын реттеуші параметрдің ролін атқара алады.

5.3. Ықтималдықтың таралуы

Динамикалық жүйелердің стохасталыну жағдайында ықтималдықтар таралуының (ықтималдық тығыздығы) шектік функциясы болатындығы толық дәлелденген [11]. Бірлік аралықта бейнелеу берілді дейік:

$$x_{i+1}=f(x_i), \quad x_i\in[0,1], i=0,1,2... \quad (5.7)$$

Ықтималдықтың тығыздығы Дирактың мына түрдегі дельта-функциясы арқылы анықталады.

$$\rho(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\delta(x-f^i(x_0)). \quad (5.8)$$

$f(x)$- функциясының стационар болу шарты (уақыт қадамына (i) тәуелсіздік) Фробениус-Перронның интегралды теңдеуіне әкеледі:

$$\rho(y)=\int_0^1\delta(y-f(x))\rho(x)dx \quad (5.9)$$

(5.8)-ден (5.9)-ға ауысу мүмкіндігінің физикалық мағынасы – ықтималдық таралуының тұрақты функциясына қатысты уақыт бойынша орташалауды ансамбль бойынша орташалау арқылы бойынша орташалауды ауыстыруда болып отыр. $\rho(x)$ шамасын инвариантты (өзгермейтін) деп алуға болады, үйткені ол $f^i(x)$ мәніне байланысты емес. (5.9)-дан δ - функция қасиетін пайдалана отырып, сызықтық функционалдық теңдеу аламыз:

$$\rho(y)=\sum_{i=0}^{N-1}\rho(x_i(y))Dx_i(y)\Big/Dy. \quad (5.10)$$

$x_i(y)-f(x)=y$ теңдеудің i-ші түбірі, $Dx_i(y)/D(y)$ y-тен x-ке түрлендірудің якобианы.

(5.10)-ды дәл, немесе, жуықтап шешкенде $\rho(y)$-ты, онан соң $\rho(x)$-ны табуға болады.

Ықтималдықтың таралуын ең қарапайым жағдайларда аналитикалық жолмен есептеуге болады.

Егер мынадай жаңа айнымалыға көшсек

$$x'=\frac{2}{\pi}arcsin x^{1/2} \tag{5.11}$$

(5.1) логистикалық бейнелеудегі $\alpha=4$ жағдайында мынадай сызықтық бейнелеу аламыз:

$$x'_{i+1}=\begin{cases} 2x'_i, 0<x'_i<\frac{1}{2} \\ 2(1-x'_i), \frac{1}{2}<x'_i<1. \end{cases} \tag{5.12}$$

Бұл бейнелеу үшін ықтималдықтың тығыздығы $\rho'(x')=1$. Ықтималдықтың сақталуын

$$\rho'(x')dx'=\rho(x)d(x), \tag{5.13}$$

түрде жазайық, бұдан

$$\rho(x)=\frac{dx'}{dx}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{(x(1-x))^{1/2}}. \tag{5.14}$$

5.4. *Корреляциялық функциялар*

Корреляция кездейсоқ шамалар арасындағы кеңістіктік және уақыттық, немесе функционалдық байланысты анықтайды. Динамикалық бейберекеттіктегі x_i, x_j- байқалған мәндер арасындағы корреляцияның ℓ өлшемге (x_i, x_0- арасындағы қашықтық) тәуелділігі былай анықталады.

$$C(\ell)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\sum_{i,j}\theta(\ell-(x_i-x_j)). \tag{5.15}$$

θ-Хевисайд функциясы:

$$\theta(\ell-|x_i-x_j|)=\begin{cases} 0, \ell-|x_i-x_j|<0 \\ 1, \ell-|x_i-x_j|>0 \end{cases}. \tag{5.16}$$

Такенс [6] x_i бір құраушы бойынша m - өлшемді

$$X_i^m=(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m-1}), \tag{5.17}$$

вектор тұрғызып , динамикалық жүйенің өлшемділігі туралы мағлұмат алуға болатындығын көрсетті. $m=3$ жағдайы үшін есептелген корреляция $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$- құраушылары бар реалды үш өлшемді вектордың корреляцияларымен эквивалентті: $lnC(\ell)$-ның $\ln\ell$-ге тәуелділігі бірдей көлбеулікке ие. Практикада зерттелінетін құбылыстың өлшемділігін талқылау үшін m -нің өсуімен жететін жоғарыдағы тәуелділіктің шектік түрі (оның қанығуы) пайдаланылады. Стохастикалық құбылыстардағы физикалық шамалар корреляциясы егер элементар қозуларды сипаттайтын аналитикалық өрнектер белгілі болса тікелей есептеленуі мүмкін. Бейсызық ортаның стохастизациясы кезінде солитон, құйын және т.б. түрлерде квазибөлшектер (элементарлық қозулар) түзіледі. Олар [12] -де жекеленген жағдайлар үшін теориялық түрде анықталған. (5.13) жұмыстарда гидродинамикалық турбуленттіктің құрылымды элементтері болып табылатын құйынды солитондар үшін аналитикалық өрнектер табылған. Бұл өрнектерді ағыс функциясына тәуелді $f(r,\varphi)$- түрінде белгілеп, динамикалық шамалардың әртүрлі корреляцияларын есептеуге болады.

$$C_{aiai}(\ell)=\int f_{ai}(r+\ell,\varphi)f_{ai}(r,\varphi)dr, \tag{5.18}$$

мұнда a, $в$ - индекстері квазибөлшектің сортын анықтайды, i, j - динамикалық шамалардың түрлерін анықтайды, r, φ- полярлық координаталар. φ- бұрышы бойынша интегралдай отырып, кеңістіктік корреляцияны табады. Бейсызық ортада әртүрлі құрылымның болуына сай (құбылысы) ℓ-дің өсуімен корреляция тербелмелі (осциллияциялы) түрде азайып, теріс мәнді де қабылдайды. Бұл заңдылықтардың бәрі де [5, 4] - жұмыстарда турбуленттікті зерттеу тәжірибелерімен дәлелденген.

(5.15) формуланы пайдалана отырып, динамикалық бейберекеттіктегі тербелмелі корреляцияны (бейберекеттік пен реттіліктің алмасуы) іздестіруге назар аударуға болады.

5.5. Спектрлік функциялар

Спектрлік функция (5.18) корреляциялық функцияны Фурье - түрлендіру ретінде табылады:

$$F_{aiei}(k)=\int C_{aidj}(\ell)\cdot e^{ik\ell}d\ell, \qquad (5.19)$$

мұнда жорымал бірлік үшін де индекстегідей i - белгілеуі пайдаланылды. $a=в$, $i=j$ жағдайы k параметрімен сипаталатын жеке қозғалыс энергиясының спектрлік қуатын анықтайды.

$X(t)$ - физикалық шаманың үзілісті байқалу жағдайында a_k^n - (n -ші интерация) фурье-құраушысы ізделінеді, оның модулінің квадраты спектр қуатын береді:

$$X^n(t)=\sum_k a_k^n exp(2\pi ikt/T_n). \qquad (5.20)$$

$T_n=2^n$ деп алып, мынаны алуға болады [6]:

$$a_{2k}^{n+1}=a_k^n, a_{2k+1}^{n+1}\approx 0,045a_{(2k+1)/2}^n. \qquad (5.21)$$

6. Синергетикалық информация және энтропия

Синергетика тұрғысынан бейсызық динамикалық жүйенің стохасталануымен бірге жүретін тепе-теңсіз емес құбылыстардың мейлінше универсал статистикалық сипаттамалары - информация мен информациялық энтропия түсінігі енгізіледі.

6.1. Синергетикалық информация

"Информация" деген сөздің әртүрлі мағынасы бар. Қоғамдық - саяси информация әлеуметтік жүйенің өзекті жаңалықтары туралы хабарлар жиынтығын құрайды.

Кибернетикада информация ұғымы сигналдарды сақтау, өңдеу және жеткізумен байланысты. Ықтималдық теориясында информация кездейсоқ оқиғалар ықтималдығын бір - біріне қатысты салыстырудың аддитивтік сандық өлшемі ретінде қарастырылады. Біз информацияның синергетикалық құбылыстарға қолдануға мүмкін болатындай, Шеннон ұсынған [15, 16] ықтималдық тұрғысынан берілген түсіндірмесін аламыз. A-ға қатысты B оқиға тудырған информация мөлшері деп мына сан [16] айтылады:

$$J(A/B)=log\frac{m(A/B)}{m(A)}. \qquad (6.1)$$

$B=A$ оқиғасының болуы A оқиғасы іске асқандығы жөніндегі хабар деп түсіндіріледі.

$J(A/A)=J(A)$ саны A хабарында жинақталған $J(A)$ информация мөлшері деп аталады.

$$J(A/A)=J(A)=-logP(A). \qquad (6.2)$$

J - шамасы әр уақытта теріс болмайды, себебі $0\leq P\leq 1$. Егер логарифм негізін 2-ге тең деп алсақ, информация бірлігіне бит алынады. Бір бит - екі тең ықтималды альтернативті (мүмкін болатын оқиғаларды) айыру үшін қажетті информация мөлшері. мысалға, симметриялы тиынды тастау нәтижесінде алынатын информация мынаған тең:

$$J=-log_2\frac{1}{2}=log_2 2=1 \text{ бит}. \qquad (6.3)$$

Егер A және B оқиғалары бір-біріне тәуелсіз болса, онда $J(A/B)=0$:

B оқиғасы A-ға қатысты ешқандай информация бермейді және керісінше де осылай. Әр уақытта да мына теңдік орындалады:

$$J(A/B)=J(B/A). \qquad (6.4)$$

Егер A мен B бір - біріне тәуелсіз болса, олардың бір мезгілде іске асуының информациясы былай анықталады:

$$J(AB)=J(A)+J(B). \qquad (6.5)$$

(6.5) өрнегін информация табиғатының аддитивтік шарты ретінде енгізуге болады. Бұл өрнекті функционалдық теңдеу деп қарастырып, оның бірден - бір шешуі ретінде (6.2) - ны алуға болар еді. (6.2) - ден информацияның жалғыз универсал, өте маңызды мағынасы шығады: априори (теориялық, тәжірибеге дейінгі) ықтималдығы аз оқиға барынша көп информативті болып табылады. Басқаша айтқанда, күтпеген оқиғалар өзімен бірге көп информация тудырады. Бұл қорытынды өте сирек, қайталанбайтын оқиғаларға қатысты емес.

Нақты жағдайларда информация мағынасы оның қабылдану шартына байланысты әртүрлі болады. Информацияны тасымалдаушылардың бір мүмкіндігі электромагниттік өріс болып табылады. Электромагниттік сәулені қабылдау нәтижесі үнемі бір мәнді болмайды: фотондар ағынының флуктуациясы, электромагниттік толқын фазасы жоғалуы және т.б. әсер етеді [17]. Жалпы, информация не деген сұраққа бір мәнді жауап жоқ. Информация мәні бойынша әрі материялық, әрі рухани (функционалды) текті.

Синергетикада информация зерттеулердің негізгі объектісіне айналады. Өзіндік құрылым әр уақытта бір мезгілде, әрі дараланған, әрі стохасталған (бейберекет). Бұл екі фактор - симметрияның бұзылуы және құбылыстың ықтималдық сипаты жүйенің информация тудыруы үшін жеткілікті шартты қамтамасыз етеді. Ғылымға "синергетикалық информация" деген жаңа түсінік енгізілді [15]. Информация (6.2) формуласымен өзқауым процесінде жеке құрылымдардың пайда болуы үзілісті ықтималдықтар арқылы P_i анықталатынын білдіреді. P_i-ді ең элементар процестердің ықтималдығы P_j - мен өрнектесек:

$$P_i=\alpha_{ij}P_j\,, \tag{6.6}$$

α_{ij} - ауысу матрицасының элементі арқылы информацияға белгілі бір анықталған мән беруге болады.

6.2. Информациялық энтропия

Энтропия (грек сөзі, "түрлену") термодинамикада алғаш рет энергияның қайтымсыз шашырауының өлшеуіші ретінде енгізілді және толық дифференциал түрінде былай анықталады:

$$dS=\delta Q/T \tag{6.7}$$

δQ - жүйенің алған жылу мөлшерінің вариациялық аз өсімшесі, T - температура.

(6.7) түріндегі Клаузиус бойынша S энтропия анықтамасының дәстүрге айналғанына қарамастан бұл анықтама энтропияның мағынасын толықтай ашып көрсете алмайды. Клаузиус энтропиясы тек қана аддитивтік тұрақтыға дейін дәл анықталады. (6.7) - ден тікелей энтропияны өлшеу мүмкін емес, себебі, температура тепе-тең күйге қатысты, жүйеге жылу әкелген жағдайда оны дәл анықтауға болмайды. Осы себептен (6.7) - ден шығатын энтропияның тұйық жүйеде өсу заңы "түсініксіз тұжырымдама" болып табылады ([17], 62 бет.) Ақырында, энтропияның (6.7) түрдегі термодинамикалық анықтамасы тепе - теңіз құбылыстардың жекеленген ерекшелігін ескермейді.

Статистикалық физикада энтропия жүйе бөлігін макроскопиялық күйінің статистикалық үлесінің логарифмі ретінде енгізіледі [18]:

$$S=ln\Delta\Gamma, \Delta\Gamma=\Delta P\cdot\Delta q/h^g\,, \tag{6.8}$$

мұндағы $\Delta P\cdot\Delta q$ - фазалық (кезеңдік) көлем, h - Планк тұрақтысы, g - жүйенің еркіндік дәрежесі саны. Классикалық физикада h ескерілмейді және кез - келген тұрақты арқылы фазалық көлемді өлшемсіздендіру энтропия анықтамасының бір мәнді болмауына әкеледі. (6.8) - формуланың түрі күрделі жүйе энтропиясының аддитивтік қасиетінен шығады:

$$S(\Delta\Gamma)=S(\Delta\Gamma_1\cdot\Delta\Gamma_2)=S_1(\Delta\Gamma_1)+S_2(\Delta\Gamma_2)\,. \tag{6.9}$$

(6.7)- формуламен идеал газдың энтропиясын есептеп, (6.8) - ге келуге болады, онда $\Delta\Gamma$ көлем, қысым және температура арқылы табылады.

Энтропия түсінігі кездейсоқ оқиғалардың ықтималдықтарының таралуымен де байланысты. E_i энергиясының тең ықтималды таралу жағдайында жүйе бөлігінің байқалу ықтималдығы былай анықталады:

$$P(<E_i>)=1/\Delta\Gamma\ . \qquad (6.10)$$

Осыдан энтропияны мына түрде табамыз.

$$S=ln\Delta\Gamma=-lnP(<E_i>)\ . \qquad (6.11)$$

(6.11) - дің орта ықтималды мағынасын пайдаланып былай да жазуға болады:

$$S=-\sum_i P_i lnP_i, P_i=P_i(E_i)\ . \qquad (6.12)$$

(6.12) формуласымен анықталатын энтропия информациялық энтропия деп аталады. (6.2), (6.12) формулаларды салыстыру информациялық энтропия информацияның орта ықтималды мәнін анықтайтындығын көрсетеді. Жүйе бөліктері тең ықтималды таралғанда жүйе жөніндегі анықталмаушылық максимумге жетеді, яғни, жүйе туралы барлық информация жойылып, энтропияға айналады ((6.11) формуласы). Информацияның пайда болуы анықталмағандықтың кемуімен бірге жүреді, сондықтан информация мөлшерін жойылған анықталмағандық мөлшерімен, немесе, энтропия айрымымен өлшеуге болады [19]:

$$J=S_{pr}-S_{ps}\ , \qquad (6.13)$$

pr - индексі "априори" (тәжірибеге дейін), ал ps - "апостериори" (тәжірибеден кейін) деген мәнді білдіреді. Осы себептен ғылыми әдебиеттерде (6.12) өрнегі кейде информация (егер ол пайда болса), кейде энтропия (егер ол жоғалса) деп аталады.

7. Тепе-теңсіз жүйелердің энтропиясы

Тепе-теңсіз жүйелердегі уақыт пен координатаға тәуелді энтропияны анықтаудың жолдары карастырылады.

7.1 Энтропия балансы теңдеуі. Энтропия өнімі

Тепе-теңсіз процестерде физикалық шамалар уақыт пен кеңістік бойынша өзгереді. Бұл процестер бөлшектер санының (кинетикалық теңдеу), массаның (дифузия теңдеуі), импульстің (қозғалыс теңдеуі), энергияның (термодинамиканың бірінші заңы) сақталу заңдары негізінде қарастырылып, зерттеледі. Тепе-теңсіз процестердің ең жалпы заңдылықтары энтропияның баланс теңдеуімен (термодинамиканың екінші заңы) жазылады. Тепе-теңсіз процестерде энтропия сақталмайды, оның өзгеруі процестің бағытын, жүйе қасиеттерінің сапалық өзгерісін анықтайды. Жалпы жағдайда энтропия балансы мына теңдеу бойынша жазылады [20]:

$$\frac{dS(\vec{r},t)}{dt}+div\vec{j}_s(\vec{r},t)=\sigma(\vec{r},t). \qquad (7.1)$$

$\vec{j}_s$ - энтропия ағыны, σ - энтропия өнімі, $\vec{r},t$ - координата мен уақыт. $\sigma(\vec{r},t)$ функциясы әруақытта оң және диссипативтік (қайтымсыз) процестердің себебінен энтропияның өсуіне үлес қосады. $\vec{j}_s$, σ функцияларының түрі жоғарыда аталған сақталу заңдарынан анықталады.

7.2. Больцман энтропиясы

Больцманның кинетикалық теңдеуінен $S(\vec{r},t)$ энтропия үшін мына теңдеу шығады [20]:

$$\frac{dS(\vec{r},t)}{dt}=-k\int J(\vec{r},\vec{P},t)lnf(\vec{r},\vec{P},t)d\vec{P}, \qquad (7.2)$$

мұндағы k - Больцман тұрақтысы, J - соқтығысу интегралы, f - газ молекулаларының байқалу ықтималдығының таралу функциясы. Білгі да $J\geq 0, f\leq 1$, сондықтан (7.2) - ден мына нәтиже шығады:

$$\frac{dS(\vec{r},t)}{dt}\geq 0, S(t)=\int S(\vec{r},t)d\vec{r}, \tag{7.3}$$

яғни айтқанда, тұйық жүйенің энтропиясы уақыт бойынша ешқандай кемімейді, ол не өседі, не өзгермей (тепе-тең күйде) қалады. S - тің орнына Больцман $H=-S$ функциясын пайдаланды. Сондықтан энтропияның өсу заңы H - теорема деп аталады.

Больцман газдың тепе-теңсіз күйінің энтропиясын мына түрде анықтады:

$$S(t)=-kn\int f(\vec{r},\vec{P},t)\ln f(\vec{r},\vec{P},t)d\vec{r}d\vec{p}, \tag{7.4}$$

n - бөлшектер санының орташа тығыздығы, f - жекеленген бөлшектік таралу функциясы.

Кез - келген тепе-теңсіз процестерді зерттеу үшін (7.4) энтропия формуласы былайша жалпыланады:

$$S(t)=-k\int f_N(x,t)\ln f_N(x,t)dx, \int f(x,t)dx=1. \tag{7.5}$$

x- жүйенің күйін сипаттайтын айнымалылар жиынтығы, f_N - N - бөлшектік таралу функциясы.

7.3. Энтропия өнімінің минимум принципі. Пригожин теоремасы

Тепе-тең күйде энтропия өнімі σ нольге тең. Бірақ шекаралық шарттармен (температура, қысым т.б. айырымы) ұстап тұрылатын тұрақты тепе-теңсіз күйде σ жоғалып кетпейді. Пригожин теоремасы тұрақты (стационар), шамалы тепе-теңсіз күйлерде энтропияның толық өнімінің ең төмен (минимал) болатындығын тұжырымдайды. Осы теореманың дұрыстығын нақты мысалдармен көрсетелік [21, 22] .

Тепе - тең күйден аз ауытқыған жағдайдағы қайтымсыз процестерді мына сызықтық тәуелділікпен сипаттауға болады:

$$Y^{(i)}=\sum_k L_{ik}X^{(k)}. \tag{7.6}$$

$Y^{(i)}$ - физикалық шамалар ағыны, L_{ik} - ортаның қасиетіне байланысты феноменологиялық немесе кинетикалық коэффициентер, $X^{(k)}$ - термодинамикалық күштер. Онсагердің өзара қайтымдылық қатынастарына сәйкес $L_{ik}=L_{ki}$. Тасымал процестерінің дәл теңдеулерін талдау жалпы түрде төмендегідей байланыстың болатындығын көрсетеді:

$$\sigma=\sum Y^{(i)}X^{(i)}=\sum L_{ik}X^{(i)}X^{(k)}. \tag{7.7}$$

∇T температура градиенті бар жағдайда жылу ағыны былайша анықталады:

$$\vec{Y}=-\chi\nabla T, X=L_{qq}/T^2, \vec{Y}=L_{qq}\nabla(T^{-1}). \tag{7.8}$$

Жылу өткізгіштік коэфициенті χ және феноменологиялық коэффициент L_{qq} арасындағы байланыс (7.6) - формуласын қанағаттандыратындай етіп таңдап алынған. Энтропияның толық өнімі P оның тығыздығынан алынған көлемдік интегралға тең:

$$P=\int\sigma d\vec{r}=L_{qq}(\nabla T^{-1})^2 d\vec{r}. \tag{7.9}$$

Көлем шекарасындағы температураның тұрақтылығы шартынан (7.9) функционалдың минимум шартын табамыз. Берілген вариациялық есеп үшін Эйлер - Лагранж теңдеуі мына түрге келеді [23]:

$$\frac{\partial f}{\partial(1/T)}-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial X_\alpha}\frac{\partial f}{\partial[\partial(1/T)/\partial X_\alpha]}=0,$$

$$f=(\nabla T^{-1})^2, \vec{r}=(X_1, X_2, \dots X_1). \tag{7.10}$$

(7.10) - ды дифференциалдасақ

$$\nabla^2(T^{-1})=0, \tag{7.11}$$

яғни, температураның стационар таралуын сипаттайтын Лаплас теңдеуінә эквивалентті $(\partial T/\partial t=0)$ теңдеу аламыз:

$$\nabla T=0. \tag{7.12}$$

Олай болса, энтропияның минимал өніміне сәйкес келетін күй тұрақты (стационар) болатындығы дәлелденді. Бұл принцип мына теңсіздікпен өрнектеледі:

$$\frac{d^2S}{dt^2}=\frac{d\sigma}{dt}\leq 0, \sigma_{cm}\leq\sigma(t), \tag{7.13}$$

σ_{cm} - стационар күйдегі энтропия өнімі, $\sigma(t)$ - t уақыт мезетіндегі стационар күйдің қалыптасу процесіндегі энтропия өнімі. Пригожин теоремасы сызықтық термодинамика шеңберінде дәлелденген.

Тепе - теңдіктен алыс аймақтарда (7.13) түріндегі дамудың универсал белгісі σ - ның толық емес дифференциалы үшін тағайындалған. Бұған қарамастан Пригожин теоремасы әртүрлі сипаттағы көптеген тәжірибелермен дәлелденген, жүйелердің тепе - теңсіз, бірақ стационар күйінің мүмкіндігін дұрыс тағайындайды.

Ю. Л. Климонтович сұйықтардағы турбуленттік өзқауым процесі екенін дәлелдеді: турбуленттік күйдегі энтропия өнімі ламинарлық күйдегіден кем. Сондықтан Пригожин теоремасын жалпылама мағынасында $\sigma_0\leq\sigma_t$ теңсіздігін тағайындайтын, "өзқауым процестеріндегі энтропия өнімінің минимум принципі" туралы айтуға болады [24].

7.4. Информацияның максимум принципі

[15] кітапта қарастырылған бұл принцип мағынасы жағынан энтропияның максимум принципіне сәйкес. Бұл жағдайда информацияны жүйенің анықталуына қажетті (априорлы) өлшемі деп түсіну керек. Алдыңғы тарауда атап көрсетілгендей термодинамиканың екінші бастамасының

информациялық түсіндірмесі тепе-тең жүйелерге қолдануға өте ыңғайлы. J.Джеймс информациялық энтропияның максимум принципінен мына шарттар орындалғанда

$$S=-\sum_i P_i lnP_i \ , \tag{7.14}$$

$$\sum_i P_i f_i^{(k)}=f_k, \sum_i P_i=1 \tag{7.15}$$

термодинамиканың барлық негізгі формулаларын шығаруға болатындығын көрсетті [15]. (7.15) шарттардың біріншісі сақталу заңдарына сәйкес келеді. Мысалға, f_k жүйенің k-күйіндегі энергиясын білдіреді. (7.14) бойынша анықталған энтропия экстремумы теориялық физикада [18, 22] кеңінен қолданылатын Лагранждың көбейткіштер әдісімен ізделінеді. Белгісіз коэффициенттер P_i-ді нормалау шартынан табылады. Тепе-теңсіз құбылыстарды осы жолмен зерттеудің негізгі қиындығы ашық бейсызық диссипативті жүйенің сақталу заңдарын адекватты, дәл таңдап алуға тіреледі.

7.5. Колмогоров энтропиясы

Информациялық энтропия үшін Шеннон формуласы Колмогоров энтропиясы (K-энтропия) арқылы кез-келген өлшемділікті динамикалық жүйеге жалпыланады. d - өлшемділікті фазалық кеңістік мөлшері l^d ұяшықтарға бөлінсін, жүйенің күйі τ уақыт аралығында өлшенеді. $P_{i_0 \dots i_n}$ - фазалық нүкте $X(t=0)$ i ұяшығында болатындығының, ал $X(t=n\tau)$ $-i_n$ ұяшығында болуна сай келетін ықтималдылық. Сонда K - энтропия мына формуламен есептеледі.

$$K=-\lim_{\tau\to 0}\lim_{l\to 0}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N\tau}\sum_{i_0,\dots,i_N} P_{i_0,\dots,i_N}\, lnP_{i_0,\dots,i_N} \ . \tag{7.16}$$

K-энтропия метрлік түсінік болып табылады, себебі, өлшемді анықтаумен байланысты. (7.16) өрнегі ықтималдық өлшемі үшін q ретті Реньи энтропиясының дербес жағдайы екендігіне көз жеткізуге болады:

$$K_q = \lim_{\tau\to 0} \lim_{l\to 0} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N\tau(1-q)} \ln \sum_{i_0 \dots i_N} P^q_{i_0,\dots,i_N} . \qquad (7.17)$$

(7.16) өрнек $q \to 1$ жагдайындагы (7.17) - формуланың шег[і] болып табылады.

K-энтропия жалпы саны m оң Ляпунов көрсеткіштерінің қарапайым қосындысы арқылы анықталады [24]:

$$K = \sum_i^m \lambda_i^+ . \qquad (7.18)$$

(7.18) нәтижесінің мәні информацияның орташа жоғалуының нүктеде анықталған Ляпуновтың оң таңбалы көрсеткіштеріне пропорционал екендігінде. Қозғалыстың экспоненциалды орнықсыздығы мынадай формуламен жазылады:

$$D(t) = D(0)e^{K \cdot t}$$

$$(7.19)$$

$$D(t) = \sum_{1 \le i \le N} (X_{1i}(t) - X_{2i}(t))^2)^{1/2},$$

$D(t)$ - t уақыт мезетіндегі "1", "2" фазалық нүктелері арасындағы қашықтық, $D(0)$ - бастапқы кезеңдегі сәйкес қашықтық, $K=K(t)$ - Колмогоров энтропиясы.

8. Мультифракталдар

Бейсызық физиканың ең күрделі объектілерінің бірі - мультифракталдар түсінігі енгізіледі. Мультифракталдардың өлшемділігін анықтайтын формулалар, олардың спектрлік қасиеттері келтіріледі.

Табиғатта өлшемдердің - аддитивті қосылатын, өлшеуге болатын шамалардың (ұзындық, аудан, көлем, масса, заряд, энергия және т.б). кеңістіктегі таралуы біркелкі емес, алмасу қасиеті бар болады. Жер бетінде халықтардың орналасуы, турбуленттік энергияның, шала өткізгіштегі қоспалардың, планетадағы алтынның таралуы осыған мысал бола алады.

Көрсетілген құбылыстардың жалпы заңдылықтары мультифракталдар теориясымен тағайындалады [8]. Төменде, нақтылық үшін, геометриялық тұрғыдағы өлшемнің таралуы туралы айтылады.

Жалпылай қабылданған мультифракталдың анықтамасы жоқ. Мультифракталдардың дәл, жалпы анықтамасының логикалық компоненттері болуға лайықты бірнеше тұжырымдарды келтірелік:

- геометриялық тұрғыдағы өлшемнің алмаспалы таралуы мультифракталдық өлшеммен байланысты,
- мультифракталдық объект фракталдық өлшемділіктер жиынтығымен сипатталады,
- құрылымдық - иерархиялық өзара әсерлесуші фракталдық объектілер мультифрактал құрайды.

8.1. *Реньи өлшемділігі*

Мультифракталдық өлшемділік немесе жалпыланған өлшемділік Реньи формуласымен анықталады:

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\delta\to 0} \frac{\ln N(q,\delta)}{\ln\delta} , \qquad (8.1)$$

δ - жиын ұяшығының сипатты мөлшері, $N(q,\delta)$ - өлшем (физикалық шама) қабылдайтын және бастапқы жиын бөлігін сипаттау үшін қажетті ұяшықтардың ең аз саны, q - мультифрактал моментінің реті, ол $-\infty \le q \le \infty$ мәндерін қабылдайды.

q шамасының физикалық мәнінің түсіндірмелерінің бірі-оның $1/T$ кері температураға (оңына да, терісіне де) эквиваленттігінде. (8.1) -ді (4.1) Хаусдорф формуласынан өзгеше ететін $/1-q/^{-1}$ көбейткіші өлшемнің біркалыпты таралуы жағдайында D_q -дың топологиялық өлшемділікпен тең болуын қамтамасыз етеді. d өлшемділігі бар Евклид кеңістігінде ықтималдық өлшемі былай анықталады:

$$N(q,\delta) = \sum_i \mu_i^q(\delta) = N(\delta) \cdot \delta^{d_q}, \sum_i \mu_i = 1 , \qquad (8.2)$$

μ_i - өлшемнің i ұяшықта байқалу ықтималдығы.

Өлшемнің бірқалыпты таралуы жағдайында

$$N(\delta)=\delta^{-d}. \qquad (8.3)$$

(8.2), (8.3) - ті (8.1) - ге қойып, D_q - ді табамыз:

$$D_q=\frac{1}{q-1}\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln\delta^{(q-1)d}}{\ln\delta}=d. \qquad (8.4)$$

8.2. Алмасу көрсеткіші

Мультифракталдың жиындағы алмасу (әртүрлі құрылымдық элементтердің кезектесуі) құрылымдық элементтер санының олардың сипатты мөлшеріне (масштабына) әртүрлі тәуелдігі (q бойынша) түрінде байқалады [25]:

$$N(q,\delta)\sim\delta^{-\tau(q)},\tau(q)=-\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln N(\delta,q)}{\ln\delta}, \qquad (8.5)$$

$\tau(q)$ функциясы алмасу көрсеткіші деп аталады, ол жалпыланған өлшемділікпен тікелей байланысты:

$$D_q=\frac{-1}{1-q}\tau(q). \qquad (8.6)$$

Қосымша $\tau(q)$ функциясын енгізу оның тәжірибеден оңай анықталатындығына байланысты. m_i - өлшенген мәндер айырмасы δ- ға тең болғанға сәйкес гиперкубке (фазалық кеңістіктегі көлемге) түсу ықтималдылығы $P_i\sim 1/m_i$. Уақыт үзілісті айнымалы деп есептеледі: $t=1,2,3,...,\ m_i=m_1,m_2,....$ d топологиялық өлшемділігі бар кеңістікте таралған μ_i^q ықтималдық өлшемі бар ұяшықтар санын санаймыз. (8.2) - формулаға сай жағдайдан өзгешелік - нүктелер саны (ықтималдық өлшем) ұяшықтар бойынша бірқалыпсыз таралған. Кеңістік өлшемі бірдей ұяшықтарды санап, мынаны аламыз:

$$N_d(q,\delta)=\sum_i\mu_i^q\delta_i^d=\delta^d\sum_i P_i^q\cdot m_i=\delta^d\sum_i m_i^{(1-q)},m_i=m_i(\delta). \qquad (8.7)$$

(8.5) - формуланы пайдаланып, логарифмдеу арқылы $\tau(q)$ функциясын анықтауға мүмкіндік беретін қатынасты аламыз:

$$\delta^{-\tau(q)-d}\sim\sum_i m_i^{(1-q)},m_i=m_i(\delta). \qquad (8.8)$$

8.3 Өлшемнің сингулярлық (ерекшелік) көрсеткіші

Мультифрактадық объектінің өзұқсас, иерархиялық (сатылы) табиғаты бар, сондықтан ондағы өлшемнің (физикалық шаманың) өзгеруі масштабты-инвариантты (скейлингті) $\sim\delta^{-\alpha}$- түрде ұяшықтың кеңістік мөлшеріне байланысты, α - скейлинг көрсеткіші. Мультифракталды жиынның құрылымдық болуынан және осы қасиеттің алмасу түрінде көрінуінен әрбір нүктедегі өлшем туындысының ерекшелігі (үзілісі) болады. Сондықтан α көрсеткіші, яғни, өлшем ерекшелігінің көрсеткіші, әрі Липшиц - Гельдер көрсеткіші деп аталады. Математикалық талдауда өлшемнің сингулярлық (бөлшектік) $M(X)$ туындысы былай анықталады:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{M(X+\delta)-M(X)}{\delta^\alpha}, \qquad (8.9)$$

α - Липшиц - Гельдер көрсеткіші, $\alpha<1$. Егер $\alpha=1$ болса, онда кәдімгі туынды болады, $\alpha>1$ жағдайында туынды тұрақты.

α - ның қабылданған анықтамасынан

$$\Delta M=M(X+\delta)-M(X)\sim\delta^\alpha \qquad (8.10)$$

шығады, яғни, α - ны локальдық (ұяшыққа қатысты) фракталдық өлшемділік деп те қарастыруға болады.

8.4 Мультифрактадық спектрлік функция

α - ның бірдей мәндері бар ұяшықтардың жиынтығын - $\xi(\alpha)$ шамасын қарастырамыз. Бұл жиын бөлігінің фракталды өлшемділігін $f(\alpha)$ мен белгілейміз. Сонда $f(\alpha)$ функциясына фракталды өлшемділіктің берілген мәнінің сандық үлесі мағынасын бере аламыз және жиілік бойынша энергияның таралуын анықтайтын спектрлік функцияға ұқсастырып мультифракталды спектрлік функция деп атаймыз. $f(\alpha)\leq D_0$ екендігі түсінікті, мұндағы D_0 - толық жиынның фракталды өлшемділігі.

$\xi(\alpha)$ жиынының байқалу ықтималдығының тығыздығы $\rho(\alpha)$ - ға тең болсын. Сонда $d\alpha$ аралығындағы ұяшық саны

$$dN_\alpha(\delta)=\rho(\alpha)\delta^{-f(\alpha)}\cdot d\alpha. \qquad (8.11)$$

d топологиялық өлшемділікті тұрғыда (мысал үшін, $d=2$ болатын бет ауданда) ықтималдық өлшем былай анықталады:

$$N_\alpha(\delta,q)=\sum\mu_i^q(\alpha)\delta^d=\int\delta^{q\alpha+d}dN_\alpha(\delta)=\int\delta^{q\alpha-f(\alpha)+d}\rho(\alpha)d\alpha, d\leq f(\alpha)\leq D_0. \qquad (8.12)$$

(8.12) интегралын $q\alpha-f(\alpha)$ минимумы жағдайында жететін (себебі $\delta<1$) оның максимал мәнімен бағалауға болады:

$$\frac{d}{d\alpha}(q\alpha-f(\alpha))\Big|_{\alpha=\alpha(q)}=0, \frac{d^2}{d\alpha^2}(q\alpha-f(\alpha))>0, \qquad (8.13)$$

немесе

$$f'(\alpha)=q, f''(\alpha)<0. \qquad (8.14)$$

Ендеше, $f(\alpha)$ анықталуы бойынша $q=0$ - де максимумға жететін, $|q|\to\infty$ жағдайында төмендейтін дөңес функция. Мұнан соң

$$N_\alpha(\delta,\alpha)=\delta^{q\alpha-f(\alpha)}\cdot\delta^d, \alpha=\alpha(q), \qquad (8.15)$$

$$\int\rho(\alpha)d\alpha=1 \qquad (8.16)$$

екені ескеріледі.

$f(\alpha)$-ны тәжірибеден анықталған $\tau(q)$ функциясымен байланыстыру үшін тұрғының топологиялық өлшемділігіне (d) қатысты жалпыланған фракталды өлшемділікті D_0 есептейміз. (8.15) -ті (8.1) формуласына қойсақ:

$$(1-q)(D_q-d)=f(\alpha)-q\alpha \qquad (8.17)$$

D_q-d айырмасы үшін (8.6) -ны пайдалансақ, іздеп отырған байланысты мына түрде аламыз:

$$f(\alpha(q))=q\alpha(q)+\tau(q). \qquad (8.18)$$

Осыдан (8.13) - тегі бірінші теңдеудің шешуі шығады:

$$\alpha(q)=-\frac{d}{dq}\tau(q). \qquad (8.19)$$

(8.18), (8.19) теңдеулер $f(\alpha)$ қисығын параметрлік түрде анықтайды.

9. Алмасу мен мультифракталдықтың ара қатынасы

Алмасу көрсеткіші мен мультифракталдық спектр мәндері салыстырылады, олардың физикалық мағынасы кеңірек ашылды. Ұяшық пен толық жиынның фракталдық өлшемділіктерімен байланысты тағайындалады.

9.1. Лежандр түрлендірулері

Алмасу функциясын мультифракталдық спектрлік функциямен байланыстыратын (8.14), (8.18), (8.19) формулаларының циклдік қасиеті бар: $q,\tau(q),-\tau(q)$ айнымалылары $\alpha, f(\alpha), f'(\alpha)$ арқылы өрнектеледі және керісінше, соңғы шамалар бірінші шамалар арқылы да сол түрде өрнектеледі. Бұған көз жеткізуге болады:

$$q=f'(\alpha), \tau(q)=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha), \qquad (9.1)$$

$$\alpha=\tau'(\alpha), f(q)=\tau(\alpha)-\alpha\tau'(\alpha). \qquad (9.2)$$

Функциялардың туындылары бар және циклдік топ (группа) құрайтын мұндай түрлендірулер Лежандр түрлендірулері деп аталады. Лежандр түрлендірулері тепе-теңсіз термодинамикада кеңінен қолданылады [23]. (8.14) - ті α бойынша дифференциалдап $\tau(q)$ мен $f(\alpha)$ арасындағы тағы бір байланысты мына түрде аламыз:

$$\tau''(q)\cdot f''(\alpha)=-1. \tag{9.3}$$

Бұл формула мультифракталдық құбылыстардың жалпы қасиеттерін сипатауға қолданылады [29] . Сонымен, негізгі нәтиже - (8.18) - фомуланы $\tau(q)$ функцисының Лежандр түрлендіруі арқылы да алуға болады.

9.2. $f(\alpha)$, $\tau(q)$ шамаларының шектік және экстремум мәндері

(8.12) - (8.14) анықталу шарты бойынша $f(\alpha)$ $q=0$ мәнінде максимуміне жетеді, ал $q\to\pm\infty$ жағдайда нольге дейін төмендейді:

$$f(\alpha(0))=D_0, f(\alpha(\pm\infty))\to 0. \tag{9.4}$$

Сонда (8.18) - ден

$$\tau(0)=f(\alpha(0))=D_0, \tag{9.5}$$

$\tau(\pm\infty)$ шектік мәндерін анықтау үшін q - дің әр түрлі таңбаларына сай α - ның максимал және минимал мәндерін білу керек. (8.10) - формуладан, α - локальды ықтималды өлшемнің сипаттамасы ретінде берілген өрнектен мынаны аламыз:

$$\sum_i \mu_i^q \sim \delta^\alpha \tag{9.6}$$

Ендеше, q - дің теріс мәніне α - ның ең үлкен мәні сәйкес келеді және керісінше. (8.19) - формуланы ескеріп мынаны табамыз:

$$\tau(-\infty)\sim -q\alpha_{max}, \tau(+\infty)\sim -q\alpha_{min}. \tag{9.7}$$

9.3 Алмасусыз мультифракталдық және информациялық энтропия

Алмасу функциясының ықтималдық өлшем арқылы анықтамасынан

$$N(q,\delta)=\sum_i \mu_i^q \sim \delta^{-\tau(\alpha)}, \sum_i \mu_i = 1, \tag{9.8}$$

осыдан мына нәтиже алынады: $\tau(1)=0$, немесе, $q=1$ мәнінде (9.9) алмасу жок. (8.18) - ден (9.9) немесе, $q=1$ мәнінде алмасу жок. (8.18) - ден

$$\tau(1)=0, \tag{9.9}$$

$$f(\alpha_1)=\alpha_1, \alpha_1\equiv\alpha(q=1). \tag{9.10}$$

Алмасу болмағанда (құрылымдар біркелкі) спектрлік функция $\varsigma(\alpha)$ - (жиын бөлігінің фракталдық өлшемділігі) ұяшықтын фракталдық өлшемділігіне тең. Бұл нәтижені мультифракталдық объектінің өзұқсастық қасиетінің көрінісі деп қарастыруға болады. $q=1$ жағдайы (8.1) формулада сингулярлы (ерекше) болып табылады, сондықтан $q\to 1$ шегіне сәйкес төмендегідей өрнекті пайдаланамыз:

$$\mu_i^q=\mu_i\mu_i^{q-1}=\mu_i exp((q-1)ln\mu_i)\approx\mu_i(1+q-1)ln\mu_i),$$

$$ln\sum_i \mu_i^q \approx (1+(q-1)\sum_i \mu_i ln\mu_i)\approx(q-1)\sum_i \mu_i ln\mu_i, \tag{9.11}$$

(9.11) -ді (8.1) -ге қойып, мультифракталдық өлшемділікті табамыз:

$$D_1=\lim_{\delta\to 0}\frac{\sum \mu_i(\delta)ln\mu_i(\delta)}{ln\delta}=-\lim_{\delta\to 0}\frac{S(\delta)}{ln\delta}=S, \tag{9.12}$$

мұндағы $S(\delta)$ - ұяшық бойынша өлшемнің ұсақталу энтропиясы, S - толық жиын өлшемінің энтропиясы.

$$\alpha_1 = \frac{d\tau(q)}{dq}\bigg|_{q=1} = D_1 \qquad (9.13)$$

екенін ескеріп (9.10) - формуладан мынаны аламыз:

$$f(\alpha_1) = \alpha_1 = D_1 = S. \qquad (9.14)$$

Нәтиже күткендегідей, алмасу жоқ ($q=1$) жағдайда уяшықтың және оның жиынтығының фракталдық өлшемділігі сан жағынан информациялық энтропияға тең болатын мультифракталдық өлшемділікке тең болады екен. Бұл факт мультифракталдардың статистикалық табиғатының салдары болып табылады.

Алмасу мен мультифракталдық - стохастикалық бейсызық объектің эквивалентті, бір - бірін толықтыратын сипаттамалары болып саналады. $q=0$ жағдайында мультифракталдық жоқ, ешқандай физикалық шаманы сипаттайтын өлшем жоқ, уяшық санының $N=(0,\delta)$ алмасуы туралы айтуға болады. $q=+1$, ($q\neq 1$) жағдайында алмасу жоқ, мультифракталдық өлшемнің таралуы шартсыз информациялық энтропиямен сипатталады. $q\neq 0,+1$ жағдайларында ығысқан (q-ге тәуелді, шартты) энтропияны қарастыру қажет [26].

Осыдан кейін мультифракталдық момент реті (q) мен оған сәйкес спектрлік талдаудың физикалық мәнісін кеңірек ашуға болады. Әдетте физикалық шамалардың алғашқы моменттерінің айқын физикалық мәні бар. Мысалға, жылдамдықтың бірінші моменті импульспен, екінші моменті энергиямен, үшінші моменті энергия ағынымен байланысты және т.с.с. Ықтималдық өлшем ретінің мағынасын мультифракталдық формализмнің термодинамикамен ұқсастығын пайдалана отырып анықтауға болады, оның мүмкін екендігін (9.14) нәтиже көрсетеді. Егер q реттілігі бар ықтималдық өлшемінің жиынына статистикалық қосындыны, спектрлік функцияға статистикалық мағынадағы энтропияны сәйкестендірсек, онда q параметрі кері температураға сәйкес келеді [25] . q - дің теріс мәніне теріс температу-раның сәйкес келетіндігі тепе-теңсіз құбылыстарды сипаттау үшін қолданылатын формальды түсінік [18] . (9.7) $f(\alpha)$ қисығының

жоғары көтерілетін аймағы $q>0$ мәндерге, төмен түсетін аймағы $q<0$ мәндеріне сай келеді. $f(\alpha)$ қисығы бейсызық құбылыстардың универсал сипаттамасы болып табылады. [25], [28] жұмыстарда біртекті және біртекті емес турбуленттік бойынша жасалған әртүрлі тәжірибелер $f(\alpha)$ функциясының жалпы заңдылықтарды қамтитындығы көрсетілген.

$q=\pm 1$ мәндері мультифракталдар теориясында әртүрлі нәтижелерге әкеледі. Сондықтан q мәнісінің дәл түсіндірмесінде жиынның өзінің құрылымындағы түрлі ерекшеліктерін ескеру қажет. Тәжірибемен жақсы үштасатын нәтиже алынған [28] жұмыста $q>0$ жағдайы бірдей циркуляциялы өзара әсерлесуші құйындар (турбуленттіктің құрылымдық элементтерінің) қосарының саны ретінде, ал қарама-қарсы циркуляциялы жағдай $q<0$ мәндеріне сәйкестендірілген.

10. Өзаффинді (біртекті емес) мультифракталдар

Өзаффинді (біртекті емес) мультифракталдар туралы түсінік енгізіледі, олардың жалпыланған өлшемділігінің, спектрі мен толық өлшемінің кеңістіктік таралуының формулалары келтіріледі.

10.1 Біртекті емес мультифракталдардың жалпыланған өлшемділігі

(8.1) Реньи формуласы барлық кеңістіктік, немесе уақытқа байланысты айнымалылар бойынша ұқсастық коэффициенті бірдей өзұқсас мультифракталдардың өлшемділігін анықтайды. Бейсызық орталардың құрылымдық элементтері нақты бастапқы және шекаралық шарттарға байланысты біртекті емес және анизотропиялық болады. Бұл жағдайларда оларды әртүрлі айнымалылар бойынша ұқсастық коэффициенті бірдей емес өз аффинді мультифракталды объектілер деп қарастыру қажет. Жалпы, аффинді түрлендіру деп түзу сызықты қасиеттер сақталатын ең жалпы геометриялық түрлендіруді атайды. D_q -шамасын анықтау үшін ең жалпы функционалды қатынастарды қарастырамыз [29].

Уяшықтың q_j әртүрлі реттіліктегі моменті бар μ_i ықтималдық өлшемі үшін Гельдер теңсіздігін пайдаланамыз:

$$\sum_i \mu_i^{\sum q_i} \le \prod_j \left(\sum_i \mu_i^{q_i / P_i} \right)^{P_i}, \sum_j P_j = 1, \qquad (10.1)$$

$P_j = \delta / \delta_j$ - өзұқсас (изотропты) δ масштабы бар құрылымның эволюция жағдайында δ_j масштабтың байқалу ықтималдығы. Теңдік P_j, q_j сандары арасында байланыс болғанда орындалады:

$$P_j = const\, q_j = Cq_j \, (C<0, q_j<0). \qquad (10.2)$$

Осыдан кейін (10.2) формуланы және P_j үшін нормалау шартын ескерсек :

$$q_j = 1,2....n; q_j \equiv j, \; 1 - C(1+2+...+(n-1)) = nC, \qquad (10.3)$$

$$C = C(n) = 2/n(n+1). \qquad (10.4)$$

Кездейсоқ n саны квазистационарлы (виртуальды, 3 бөлімді қараңыз) құрылымдағы әсерлесуші қосардың, (жұптың) максимал санын білдіреді. Байқалған құрылымның q_j саны жалпы алғанда n - ге тең емес $q_j \le n$. Жалпылама өлшемділігі D_q, фракталдық жиында таралған толық өлшем былай анықталады:

$$\sum \mu_i^q = N(\delta)\delta^{qD_q} \sim \delta^{D_q(q-1)} \qquad (10.5)$$

Мұнда изотропты ұяшықтар санының бірқалыпты таралуы қабылданған. Әртүрлі q мәніне сәйкес келетін ұяшықтардың таралу өзгешелігін локальды сипаттама – мультифракталды спектрді анықтағанда ескеру қажет болады.

(10.5) - формуланы ескеріп, (10.1) – өрнекті мынадай теңдік түрінде жазамыз:

$$\left(\sum_j q_j - 1\right) D_{\sum_i q_i} = \sum_j (q_j - P_j) D_{q_j / P_j}, P_j = C(n) q_j. \qquad (10.6)$$

$C(n)$ белгісіз болғандықтан алдымен (10.6) - дан D_q - ны анықтап, содан кейін қажет болса $C(n) = P_j / q_j$ шамасын іздеу керек. (10.6) өрнегін жалпыланған өлшемділік $\sum P_j$ және q_j / P_j аргументтерімен байланыстыратын функционалды теңдеу деп қарастыру керек. Бұл теңдеудің екі дербес шешуі бар:

$$D_q = D_0 + \frac{1}{q-1} \log_a \sum_j P_j^q, \qquad (10.7)$$

$$D_q = D_0 + \frac{q}{q-1} \log_a \prod_j P_j, \qquad (10.8)$$

D_0 - геометриялық түрғының фракталды өлшемділігі, a - логарифм негізі, ол q-ге тәуелді емес және жалпы жағдайда бірмәнді болып анықталмайды [29,30].

(10.7) - шешім (10.6) - теңдеуді мына шарт орындалғанда қанағаттандырады:

$$P_j = q_j \Big/ \sum_j q_j, C = 1 \Big/ \sum_j q_j. \qquad (10.9)$$

Бұл шарт бойынша P_j мен q_j бірмәнді байланысты болғандықтан кез-келген біртекті емес жағдайды (өзаффиндікті) сипаттайды. $a = \delta \to 0$ жағдайда (10.7) формула өзұқсас мультифракталдар үшін арналған Реньи формуласына көшеді. Бұл факт $a = \delta$ мүмкін варианттардың бірі деп алуға негіз жасайды. (10.8) - шешім (10.9) - шартсыз қанағаттандырылады. Екі шешім үшін $P_j = C(n) q_j$ түріндегі жалпы шарт q_j-дің берілген мәнінде P_j-дің әртүрлі іске асу мүмкіндігін жоққа шығармайды. (10.8) түріндегі шешімнің мультифракталдардың тікелей өзаффиндік қасиетін сипаттауға қолданылуы оның алмасуды тудыратын ықтималдықтың таралуының мультипликативті заңына негізделетінімен түсіндіріледі. Өзаффиндік мультифракталдың өзіндегі алмасудың болуының салдары болып табылады.

10.2 *Өзаффинді мультифракталдың спектрлік функциясы*

Ұяшықтың ықтималдық өлшемінің $\mu(q)=\mu q$ анықталуын назарға ала отырып, d топологиялық өлшемділікті кеңістікте ұяшықтар санының q бойынша таралуының әртектілігін ең қарапайым жолмен былай ескереміз:

$$N_d(q,\delta)=\delta^{-d/q},\delta^d=\delta(q)^{q\cdot d},\delta(q)=\delta^{1/q}. \qquad (10.10)$$

Енді $\tau(q)$ алмасу функциясы мен (10.8) жалпыланған өлшемділік арасындағы байланыс мына түрге келуі керек:

$$\tau(q)=\frac{1-q^2}{q}D_q. \qquad (10.11)$$

Бұған өлшемі бар ұяшықтар саны арқылы D_q - ны анықтағанда көз жеткізуге болады:

$$D_q=\frac{q}{q^2-1}\lim_{\delta\to 0}\frac{\sum_i \mu_{di}^q}{ln\delta}=\frac{\tilde{i}}{q^2-1}\lim_{\delta\to 0}\frac{ln\delta^{qd}\,\delta^{-d/q}}{ln\delta}=d, \qquad (10.12)$$

(8.19), (10.8) формулаларын пайдаланып, мынаны табамыз:

$$\alpha(q)=\frac{d\tau(q)}{dq}=(1+\frac{1}{q^2})(D_0+A),q=\mp((D_0)/(\alpha-A-D_0))^{1/2} \qquad (10.13)$$

$$f(\alpha(q<0))=-2qD_0-2Aq+A, \qquad (10.14)$$

$$f(\alpha(q>0))=2D_0/q-A,$$

$$A=log_\delta\prod_j P_j. \qquad (10.15)$$

$$-f(\alpha_*(q<0))=f(\alpha_*(q>0)),\ f(\alpha)=f(\alpha(q<0))-f(\alpha(q>0))+C.$$

(10.13) - тегі түбір алдындағы теріс таңба $f(\alpha)$ - тің дөңестігімен шартталады. α_* нүктесіндегі $f(\alpha)$ максимумының шарты

$$f(\alpha_*)=D_0,f'(\alpha_*)=0,\alpha_*=2(D_0+A). \qquad (10.16)$$

$f(\alpha)$ -ты әртүрлі дәлдікпен анықтайтын тұрақты қосылғышты табуға мүмкіндік береді, яғни $f(\alpha)+C=D_0,C=1+4\sqrt{\frac{A}{D_0}}$ екендігі ескеріледі. Осыдан кейін мына нәтижені аламыз:

$$\tilde{f}(\tilde{\alpha})=1+4\left(\frac{A}{D_0}\right)^{1/2}-2D_0^{1/2}((\tilde{\alpha}-A)^{1/2}+D_0+A(\tilde{\alpha}-A)^{-1/2}) \qquad (10.17)$$

$\tilde{\alpha}=\alpha-D_0,\tilde{f}(\alpha)=f(\alpha)/D_0.$

(9.3) - тен q мультифракталды момент реттілігімен өзаффинді фактор А байланысы шығады:

$$A=\frac{D_0}{3}(q^{-2}+q^{-5})q\geq 3\,A\leq 0,05D_0 \qquad (10.18)$$

$q\geq 3$ болғанда $A\leq 0,05D_0$

Бұл факт үштен көп өзара әсерлесуші бөліктерден тұратын динамикалық жүйенің стохасталануымен және изотропты болуымен үйлеседі (мысалға, гидродинамикалық құйындардың әсерлесуі , [5]). (10.17) формула құйындық солитондардың байқалу ықтималдығының теориялық мәндерін қолданған жағдайда шекралық қабаттағы, сорғы ағындағы, атмосфераадағы турбуленттік сигналдар заңдылығын сипаттайды.

10.3 *Тепе -теңсіз құбылыстардағы мультифракталдық өлшемдер*

Скейлингтік қасиеттерін ескеріп сәйкес өзұқсас мультифракталды, ішкі құрылысын назарға алмағанда, $q=0,\pm\infty$ жағдайлардағы қарапайым фракталды объект деп есептеуге болады. Демек, мультифракталдық әрқашанда өзқауым процестері сипаттамаларының негізгілерінің бірі - тепе-теңсіз қасиетпен байланысты екен.

Кеңістік пен уақыт бойынша өлшем өзгерісінің мейлінше жалпы заңдылықтарын іздестіреміз. Қарапайым жағдай ретінде тек координатаға тәуелділікті қарастырамыз. Ал уақытқа тәуелділікті осы талдауға ұқсас жолмен тағайындауға болады.

Барлық өзара әсерлесуші ұяшықтармен байланысты өлшем q - дің барлық мәндері бойынша аддитивті қосынды ретінде табылады:

$$M(\delta,\vec{z})=\sum_{q=-\infty}^{\infty}N(q,\delta(q),\vec{z})=\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta^{qD_q}N(\delta(q),\vec{r}). \quad (10.19)$$

$\vec{r}$ -координата. Ұяшық таралуын тепетеңсіз $N(\delta(q),\vec{r})$ функциясын құрылым масштабы аймағында Гиббстың локальды тепе-тең таралуымен ауыстыруға болады:

$$N(\delta(q),\vec{r})=exp(-\varepsilon(\delta(q)),\vec{r})/\varepsilon_0, \quad (10.20)$$

мұндағы ε - ұяшық энергиясы, ε_0 - бүкіл жүйе қасиеттерімен байланысты оң таңбалы тұрақты. j - сортты құрылымның меншікті масштабын (корреляциялық) енгізу айнымалыларды мынадай жолмен алмастыруды білдіреді:

$$\vec{r}\rightarrow\frac{\vec{r}}{\delta}\frac{\delta}{\delta_j(q)}=\frac{\vec{r}}{\delta}P_j^q, \quad (10.21)$$

себебі, ұяшықтағы q реттілікті өлшем P_j^q ықтималдықпен байқалады. Өзаффинді құрылымдардың байқалу ықтималдығы ұяшықтың өзінің фракталдық құрылымы арқылы анықталуы мүмкін:

$$P_{j,\alpha}=(\delta/\delta_{j1})\alpha,\delta_{j1}=\delta_j(q=1),\sum_j P_{j,\alpha}=1, \quad (10.22)$$

α - ұяшықтың сипатты масштабын анықтаумен байланысты фракталды өлшемділік (сингулярлық көрсеткіш). δ_{j1} сызықтық масштабты анықтаған жағдайда $1\leq\alpha\leq d$ деп аламыз. Осыдан соң (10.19) мына түрге келеді:

$$M(\delta,\vec{r})=\sum_j\sum_{q=-\infty}^{\infty}P_j^{qD_q/\alpha}exp(-\varepsilon(\frac{\vec{r}}{\delta}P_j^{q/\alpha})/\varepsilon_0), \quad (10.23)$$

мұндағы D_q – (10.8)-ге сәйкес былай анықталады:

$$D_q=D_0+\frac{q}{q-1}log_\delta\prod_j P_{j,\alpha}. \quad (10.24)$$

[31] - жұмыста электронды - иондық доғалық плазманың, турбулентті сорғы ағынның бастапқы аймағының, турбулентті жылу алмасу интенсивтігінің тәжірибелік тәуелділіктерін сипаттауға [10.19] формуласын қолданудың мүмкіндігі көрсетілген.

11. Энтропия өзіндік құрылым дәрежесінің белгісі ретінде

Өзқауым кезінде энтропияның азаюы туралы Климонтович теоремасы талқыланады, оның тұжырымдамасы мультифракталды талдау тілінде келтіріледі. Өзқауымдық жүйелерді информациялық және энтропиялық сипаттау мүмкіндіктерінің сандық белгілері тағайындалады.

11.1. Климонтовичтың S - теоремасы

Егер салыстыруды орташа энергияның бірдей мәнінде жүргізсе, барынша реттелген өзқауым күйге ауысқанда информациялық энтропияның кемитіндігін осы теорема тұжырымдайды [24]. Теореманың атына "өзқауым" деген ағылшын сөзіндегі бірінші әріп (S) алынады. Гиббстың жүйе бөлігінің энергия бойынша таралу функциясының жалпы түрін пайдалансақ:

$$f(x)=exp((F-H(x))/Д),F=<E>-TS, \quad (11.1)$$

мұндағы X - үзіліссіз айнымалылар жиынтығы, F - еркін энергия, $<E>$ - орташа энергия, T - температура, S - энтропия, $H(X)$ - Гамильтон функциясы, $Д$ - әсерлік, эффектік температура. a_n - жүйеге энергия, зат, информация келтіруді реттеуші параметрдің - комплексті өлшемнің мәні болсын. a_n -ның өзгеруімен бейсызық жүйе өзқауымдық әртүрлі деңгейіне тізбекті ауысады. $f_0(X,a_0)$ таралу функциясымен сипатталатын тепе-теңдіктегі күйді физикалық бейберекеттік күйі деп аламыз (толық тепе-теңдік жағдайында барлық информацияны жоқ ететін тепе-тең ықтималды таралу орындалады). Δa өсімімен ұстап тұрылатын тепе-теңсіз күй мына таралу функциясымен сипаталады:

$$f(X,a_0+\Delta a)=exp\left(\left(F-H(X,a_0+\Delta a)\right)Д^{-1}\right), \qquad (11.2)$$

$$\int f dx=\int f_0 dx=1.$$

Энергияның екі жағдайдағы теңдігі үшін шарт былайша жазылады:

$$\int H(x,a_0)f_0(x,a,\Delta a)dx=\int H(x,a_0)f(x,a+\Delta a)dx. \qquad (11.3)$$

Бұл теңдеудің шешуінен Δa арқылы, f_0 - ді қайта нормалауға қажетті $Д=Д(\Delta a)$ тәуелділігі табылады. (7.5) формуламен анықталатын энтропияларды S_0,S арқылы, сәйкесті таралуларды f_0,f арқылы белгілейміз.

$$H(x,a_0)=-ln f_0 \qquad (11.4)$$

деп алып және (11.3) - ті ескеріп, мынаны табамыз:

$$S_0-S=\int f ln(f/f_0)dx\ge 0, \qquad (11.5)$$

бұл жерде $lna\ge 1-1/a$ теңсіздігі пайдаланылады. Өзқауым нәтижесінде энтропия кемиді. Егер тәжірибеден Х шамасының байқалу ықтималдығының үзілісті мәндері белгілі болса:

$$P_{0i}=f_{0i}(X_i)\Delta X, P_i=f_i(X_i)\Delta X, \qquad (11.6)$$

онда таралу функциясын нормалау шарты мына түрде жазылады:

$$\sum_i exp((F+lnP_{0i})/Д)=1. H_i=-lnP_{0i}. \qquad (11.7)$$

Энергия үшін S - теореманың қосымша шарты былай жазылады:

$$\sum_i (lnP_{0i}(exp(F+lnP_{0i})/Д)-P_i)=0. \qquad (11.8)$$

Бізге тепе-теңсіз күйдегі жүйенің реттелу дәрежесін анықтайтын Д-ның өзгерісі қажет (Д-ның ұлғаюы жағдайында). (11.7) - ден F-ті (11.8) - ге қойсақ:

$$\sum_i \left(lnP_{0i}\left(P_{0i}^{1/Д}/\sum_i P_{0i}^{1/Д}-P_i\right)\right)=0. \qquad (11.9)$$

(11.9) теңдеу Д-ға қатысты оның мәндерін салыстыру үшін екі рет шешіледі, екінші ретте P_{0i},P_i өзара орын ауыстырады. Д-ның үлкен мәні өзқауымдық бар екенін көрсетеді. Осы тәсілмен P_{0i} -ді қайта нормалауға қажетті $Д=Д(\Delta a)$ тәуелділігі табылады. Онан соң (11.5) - формуладан өзқауымдық энтропияның кемуі сан түрінде анықталады.

11.2 Синергетикалық жүйенің өзіне-өзі ұқсастығының белгі - шарты

Синергетикалық информацияның мағынасын мына түрде кеңейтіп жазамыз [26]:

$$J=J(P(J),q). \qquad (11.10)$$

Ықтималдықтың информацияның өзіне үзіліссіз тәуелділігі бейсызықтық ең басты қасиеті болатын жүйенің құрылымдануының өзіндік сәйкестігін ескереді, q шамасы мультифракталдық момент ретін анықтайды. $P(J)$ ықтималдықты $f(J)$ таралу функциясы арқылы анықтасақ:

$$J=-lnP(J)=-ln\int_J^\infty f(J)dJ, f(J)=P(J)=e^{-J}, \qquad (11.11)$$

$$\int_0^\infty f(J)dJ=1.$$

Информациялық энтропия былай анықталады:

$$S(J)=-\int_{J}^{\infty}P(J)lnP(J)dJ=(J+1)\cdot e^{-J}. \qquad (11.12)$$

Өзұқсастық өзқауым процесінің сипатты функцияларының қозғалмайтын нүктелерінің бар екендігін білдіреді:

$$P(J_{*})=J_{*}.e^{-J_{*1}}=J_{*1}, J_{*1}=0{,}567, \qquad (11.13)$$

$$S(J_{*})=J_{*}.(J_{*}+1)\cdot e^{-J_{*2}=J_{*2}}, J_{*2}=0{,}806. \qquad (11.14)$$

Табылған қозғалмайтын нүктелер J информацияның кез-келген бастапқы мәнінде жететін, сәйкес бейнелеулердің шектері болып табылады:

$$J_{i+1}=P(J_{i}), \lim_{i\to\infty} exp(-exp(...-exp(-J_{0})...)=J_{*1}, \qquad (11.15)$$

$$J_{i+1}=S(J_{i}), \lim_{i\to\infty} exp(-exp(...(-exp(ln(J_{0}+1)-J_{0})...)=J_{*2}. \qquad (11.16)$$

J_{*} сандарының мағынасының мұндай түсіндірмесі информация мен энтропияның і нөмірі бойынша иеархиялық деңгейлердегі дамуын байқауға мүмкіндік береді.

(11.14) шартынан $J+1\approx J$ жағдайында (11.13) шығады, сондай-ақ $J<<1$ жағдайында экспонентті функцияны жіктегенде бірінші жуықтауды ескеріп мынаны аламыз:

$$J_{*3}^{2}+J_{*3}-J=0, J_{*3}=0{,}618. \qquad (11.17)$$

"Алтын қиманы" анықтайтын J_{*3} Фибоначчи саны да бейнелеудің шегі болып табылады, оның түрі мынадай:

$$J_{i+1}=J_{i}+J_{i-1}. \qquad (11.18)$$

Фибоначчи саны динамикалық бейберекеттік теориясында, ғылымның басқа салаларында, "ең нашар" (заңдылығы жоқ) иррационал сан ретінде қолданылады [6].

J_{*1} саны мәні J_{*1}-ге тең информацияны тудыратын құрылымдардың өзіндік үйлесімімен байқалу ықтималды.ын анықтайды. Аз информациялы (жиі кездесетін, изотроптық) құрылымдар J_{*1}-ге қарағанда үлкен ықтималдықпен

байқалады. J_{*1} шамасын ішкі құрылысы ескерілмейтін ең қарапайым құрылымдар үшін локальды энтропия деп қарастыруға болады. Демек J_{*1} динамикалық жолмен сипаттауға болатын құрылымның максималды энтропиясын анықтайды. J_{*1} статистикалық сипаттау тұрғысынан минимум энтропия болып есептеледі, информацияның одан төмен мәндерінде қарастырылып отырылған объектің синергетикалық мәні болмайды.

J_{*2} саны тепе-теңсіз, өзқауымдық жүйенің шектік максимум энтропиясын анықтайды. Өзқауым күйінде энтропиясы $S=1$ болатын гаусстық шу (хаос) күйімен салыстырғанда энтропия кемиді. J_{*3} саны жүйенің динамикалық және статистикалық күйлері арасындағы ауыспалы күйді сипаттайды.

11.3 Өзқауым деңгейінің белгі-шартының мультифракталдық түсіндірмесі

J_{*2} санының тәжірибеде байқалатындығын тексеру S -теореманы мультифракталды талдау тілінде тұжырымдау арқылы мүмкін болады. Егер $q=1/Д$ мультифракталды момент ретінің термодинамикалық түсіндірмесін қабылдасақ, S-теореманың (11.9) нәтижесі шартсыз энтропияга қатысты шартты (q-ге тәуелді) энтропияның түрін анықтайды. q параметрі арқылы шарт қою анықталмағандық өлшемі - энтропияны кемітеді. $S(q)$ шартты (ығысқан) энтропия барлық уақытта шартсыз энтропия S-тен кем, олардың айырмасы информацияны береді:

$$J(q)=S-S(q),$$

$$S=-\sum_{i}P_{i}lnP_{i}, S(q)=-\sum_{i}P_{i}ln\left(P_{i}^{q}/\sum_{i}P_{i}^{q}\right), \qquad (11.19)$$

$$\sum_{i}P_{i}(\delta)=1, -\infty\leq q\leq\infty.$$

Информациялық өлшем арқылы (8.1) формула бойынша жалпыланған фракталдық өлшемділікті есептейміз:

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\delta \to 0} \frac{J(\delta, q)}{\ln \delta}. \qquad (11.20)$$

Сөйтіп, мультифракталдық талдауға қажетті барлық формулаларды аламыз, $f(\alpha), \tau(q)$ функциялары үшін Лежандр түрлендірулері де алынады [26]. (9.14) - формула бойынша $f(\alpha_1)=S$. Сондықтан мына нәтижені іздеуге болады:

$$\lim_{q \to \infty} \frac{f(\alpha(q-2)) - f(\alpha(q-1))}{f(\alpha(q-1)) - f(\alpha(q))} \to S(J_{*2}) = J_{*2}. \qquad (11.21)$$

Бұл нәтиже диссипативтік бейнелеулердің динамикалық бейберекеттігі үшін дәлелденеді. $J_{*2}=0,806$ санын кез-келген динамикалық бейберекеттіктегі өзқауым үшін тікелей $f(\alpha_1)=S$ теңдігін пайдаланып алуға болады.

Қорытынды

Ғылымның қазіргі деңгейі тұрғысынан күрделі жүйені танып - білудің тек қана ең маңызды жолдары қарастырылды. Негізгі идея зерттеліп отырған объектінің өзіндік құрылымының қарапайым түрлерін іздеп табуға әкеліп соғады. Олардың, өзара әсерлесуін, күрделі құрылымдарын зерттеу негізінде бейсызық құбылыстың жалпы физикалық теориясы құрылады. Құрылымдар түрін іздеу физиканың нақты салаларының міндеті болып табылады. Бейсызық ортаның локальды /жекеленген/ құрылымдарын мысалға, солитондарды [12], іздестірудің математикалық тәсілдерін жалпылауға мүмкіндік туды.

Ашық, тұйықталмаған бейсызық жүйенің мейлінше универсал заңдылықтары сақталу заңдарымен бірге қарастырылатын энтропияның баланс теңдеуімен тағайындала алады. Бейберекеттік пен реттіліктің, динамикалық жүйенің түрбейнесі мен байқалған сигналдар ара қатынасына информациялық - энтропиялық және мультифракталдық талдау жасау ең көкейтесті ғылыми бағыт болып табылады.

Бейсызық физика тағайындаған синергетикалық заңдылықтар әртектес табиғатты объектерді сипаттаудың

көптеген мүмкіндіктерін береді [1, 17, 24]. Екінші жағынан, биологиялық, әлеуметтік жүйелердің кейбір арнаулы заңдылықтары бейсызық физиканың жаңа міндеттерін тұжырымдауға ынталандырады. Мұндай жағдай, бірінші кезекте, информация теориясы мен өзқауым заңдылықтарының үштасуында болуы мүмкін.

[32, 33, 34] жұмыстарда синергетикалық құрылымның қасиеттері әлеуметтік жүйелердің сипаттамаларын жалпылау үшін қолданылған. [5] жұмыста күрделі жүйе ұяшығының бейсызық үлгісінің төмендегідей қасиеттері санап көрсетілген: макроскопиялық, бейсызық, тепе-теңсіздік, тұйықталмағандық, стохастылық, құрылымдық, иерархиялық, квазистационарлық, өздік үйлесім, диссипациялық. Бұл тізімге әлеуметтік жүйенің барлық белгілі негізгі сипатамалары кіреді. Дербесте жалпының барлық қасиеттері бар, жалпы көп дербестің өзқауымынан шығады. Осы сияқты басқа жаңа қорытындылар тұжырымдалуда [34 - 37].

Педагогика мен социологияда қолданылатын тестілеу әдісінің информациялық мәні айқындалды. "Иә", "жоқ" жауаптары білім деңгейін көрсетпейді, субъектінің сұраққа деген реакциясы (әрекеті) туралы информацияны береді. Сондықтан тестілеу нәтижелерін өңдеуде информация теориясының элементтерін қолдану қажет.

Қазіргі кезде оқу орындарында қолданылып жүрген көп балллды білімді бағалау жүйесіндегі шешілмеген проблема - қаншалықты мүмкін балл үлесіне қандай сапалық баға сәйкес келеді ? [34, 36] жұмыстарда көрсетілгендей бұл мәселені де ғылыми негізде шешуге болады: "өте жақсы"- 80,6 %-тен, "жақсы" - 61,8 %-тен, "қанағаттанарлық" - 56,7 %-тен, немесе 100 % -56,7 % = 43,3 % -тен жоғары жағдайларда қойылады.

[26, 34] жұмыстардың нәтижелерінен таза информациялық әсер ету (қоғамдық пікір) арқылы сайлау өткізу барысында тек 56,7 немесе 80,6 процент дауыс алғанда ғана "көпшілік", "басым көпшілік" жеңіске жетті деп айтуға болады. Бұл тұжырымдар қазіргі практикада қолданылып жүрген "50% + 1 дауыс" , немесе "2/3 % дауыс", шарттарына қарағанда дәлірек, ғылыми түрде негізделген.

Г.Г. Малинецкий

1. Матем. основы синергетики
2. Нелин. динамика
3. Нелин. дин. и хаос

Пайдаланылған әдебиет тізімі

1. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. - М.: Наука . - 1988. - 368 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. - М.: Наука.- 1986. - 736 с.
3. Бершадский А.Г. Спонтанное нарушение масштабной инвариантности во фрактальной турбулентности // ЖЭТФ. - 1990. - Т.98. - В.1 (17). С. 162 - 167.
4. Жанабаев З.Ж. Лагранжево описание однородной турбулентности // ЖЭТФ. - 1992. - Т. 102. В. 6 (12) - С. 1825 - 1837.
5. Жанабаев З.Ж. Нелинейные физические свойства гидродинамической турбулентности. Автореферат докт.дисс. - Алматы, КазГУ им аль-Фараби.-1995. 42 с.
6. Шустер Г. Детерминированный хаос. - М.: Мир - 1988. - 240 с.
7. Жанабаев З.Ж., Подгаецкая Т.Е. Нелинейные отображения, описывающие переход к турбулентности через перемежаемость // Вестник КазГУ им. аль-Фараби. Серия физическая. - 1997.
8. Федер Е. Фракталы. - М.: мир. - 1991. - 254 с.
9. Штерн В.Н. Элементарная структурная модель турбулентного перемешивания //Сб. структурная турбулентность. Под ред. Гольдштика М.А. - Новосибирск. - 1982. - 166 с.
10. Жанабаев З.Ж. фрактальная модель турбулентности в струе // Изв.СО АН СССР, серия техн.наук. - 1988. - В.4, № 15, - С. 57 -60.
11. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания.- М.: Наука. - 1987. - 424 с.
12. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. - М.: Наука. - 1980. - 319 с.
13. Zhanabaev Z.Zh. Solitons in stochastik vortex field //Rep. Nat. Akad. of Scien/ of Rep. of Kazakhstan/ - 1994. - № 5/ - P. 14 - 18.
14. Жанабаев З.Ж., Карпова О.Г. Корреляционные и спектральные функции гидродинамической турбулентности // Вестник КазГУ, серия физическая.-Алматы. - 1995. - С. 30 - 36.
15. Хакен Г. Информация и самоорганизация. -М.: Мир. -1991. -240 с.
16. Боровков А.А. Теория вероятностей. - М.: Наука - 1986. - 432 с.
17. Николис Д.Ж. Динамика иерархических систем. - М.: Мир. - 1989. - 488 с.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика, ч.1 - М.: Наука. - 1976. - 583 с.
19. Стратонович Р. Л. Теория информации - М.: Сов.радио. - 1975. -424 с.
20. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. - М.: Наука. - 1982. - 608 с.
21. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. М.: Мир. - 1990. - 344 с.
22. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. - М.: Наука. - 1977. - 552 с.
23. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. - М.: Мир. - 1974. -304 с.
24. Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. - М.: Наука. - 1990. - 320 с.
25. Вольф Э.Я., Киттель В. Поведение корреляций и флуктуаций в процессе рождения адронов при высоких энергиях // УФН. - 1993. - Т. 163, № 1. - С. 3 - 62.
26. Zhanabaev Z.Zh. The informational properties of self-organizing systems // Rep. Nat. Akad/ of Scien of Rep/ of Kaz. - 1996, № 5 - P. 14 - 19.
27. Meneveao C., Sreenivasan K.K. Simple multifraktal cascade model for fully developed turbulence // Phus. Rev. Lett. - 1987. - V. 59. - P 1424-1427.
28. Zhanabaev Z.Zh. Self-organization and multifractality in hydrodinamical turbulence // Dynamical systems and chaos. vol. 2 - World Scientific. - 1995. - PP. 222-225.
29. Жанабаев З.Ж. Размерность и спектр самоаффинных мультифракталов //ДАН РК. - 1994, № 3. - С. 25-31.
30. Фракталы в физике под ред. Пьетронеро Л. и Тозатти Э. М.: Мир. -1988. -672 с.

31. Zhanabaev Z.Zh. Multifractal measures in nonequilibr. phenomena // Rep. Nat. Akad. of Scien. of Rep.Kaz. - 1995. № 1. - P. 21 - 27.
32. Жанабаев З.Ж., Хмель Н.Д. Синергетическая сущность педагогического процесса // Поиск. - 1996, № 1. - С. 61 - 64.
33. Жанабаев З.Ж. Можно ли оценить знание рейтинговой системой и тестированием? //Вестник высшей школы РК. -1996, № 1.-С. 98 -103.
34. Жанабаев З.Ж. Синергетика знания -Алматы "Қазақ әдебиеті"-1997-39 с.
35. Жангунов О.К., Ярутина Т.Ю. Корреляционный анализ гидродинамического следа.- хаос и структуры в нелинейных системах.,Караганда КАРГУ - 1997, с. 111-114.
36. Жанабаев З.Ж., Бигожаев О.Д., Экспериментальная проверка эффективность информационного воздействия на социальную систему. Алматы МН-АИ РК - 1998. - С.138-139.

Қосымша

Орысша - қазақша тақырыптық қысқаша сөздік

Аттрактор - аттрактор (тартушы, жинақтаушы)

Бифуркация - бифуркация (еселену)

Вихревой кластер - құйындық кластер
Возмущение - үйытқу
Возмущенный гамильтониан - үйтқымалы гамильтониан
Временной ряд - мезеттік қатар

Геометрический носитель - геометриялық тұрғы

Динамическая система - динамикалық жүйе
Динамический хаос - динамикалық хаос (бейберекеттілік)
Дискретное время - үздікті уақыт
Диссипация - диссипация
Дробная производная - бөлшек туынды

Квазичастица - квазибөлшек
Кластер - кластер
Критерий - критерий, белгі-шарт
Критические значения - кризистік мәндер

Логистическое отображение - логикалық бейнелеу

Мера - өлшем
Многочастичная функция распределения - көпбөлшектік таралу функциясы
Множество - жиын
Мода - дербес қозғалыс
Мультифрактал - мультифрактал

Нелинейная физика - бейсызық физика
Нелинейность - бейсызықтық
Нелинейные явления - бейсызық құбылыстар
Неподвижная точка - қозғалмайтын (ортақ) нүкте
Неравновесная среда - тепе-теңсіз орта

Неравновесность - тепе-теңсіздік
Неравновесный - тепе-теңсіз
Носитель - тұрғы

Область - аймақ
Одночастичная функция распределения - бірбөлшектік таралу функциясы
Окрестность - аумақ
Оператор - оператор (амал)
Открытая система - ашық жүйе
Отображение - бейнелеу

Перемежаемость - алмасу, түйдектелу
Период - айырым
Подсистема - жүйе бөлігі
Последовательность - тізбек
Предельный цикл - шектік цикл
Производство энтропии - энтропия өнімі

Размерность - өлшемділік
Расходимость - шектелмеу
Реализация - байқалу
Реализация случайной величины - кездейсоқ шаманың байқалуы

Самоаффинный - өзаффинді
Самоорганизация - өзқауым (өзіндік құрылым)
Самоподобие - өзіне-өзі ұқсас (өзұқсастық)
Самоподобный - өзұқсас
Самосогласованность - өзүйлесімдік
Седло (особая точка) - тұғыр (ерекше нүкте)
Сепаратриса - сепаратриса (айырушы)
Сингулярность - ерекшелік
Солитон - солитон
Соотношения взаимности - өзара қайтымдылық қатынастары
Статистический вес - статистикалық үлес
Стохастизация - стохасталыну (уақыт бойынша бейберекеттену)
Странный аттрактор - әуейі аттрактор
Структура - құрылым

Структурование - құрылымдану

Топологическая размерность - топологиялық өлшемділік
Турбулентность - турбуленттік

Уединенная волна - оқшауланған толқын
Управляющий параметр - реттеуші параметр

Фаза - кезең
Фазовое пространство - фазалық (кезеңдік) кеңістік
Фрактал - фрактал
Фрактальная размерность - фрактальдық өлшемділік
Фундаментальный - іргелі
Функция распределения - таралу функциясы
Функция распредления плотности вероятности - ықтималдық тығыздығының таралу функциясы
Фурье - компонент - фурье - құраушы

Хаос - хаос (бейберекеттік)
Характеристика - сипаттама

Центр (особая точка) - орталық (ерекше нүкте)

Энтропия разбиения - ұсақтау энтропиясы

Ячейка - ұяшық

Мазмұны